

Interpolazione di Hermite e di Birkhoff:

Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia di classe $C^1[a,b]$. Dato un insieme di nodi $\Delta_n = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ in $[a,b]$, si definisce **polinomio d'interpolazione di Hermite** il polinomio $p_{2n+1}(x) \in \pi_{2n+1}$ tale che:

$$p_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \quad i=0,1,\dots,n.$$

$$p'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \quad i=0,1,\dots,n.$$

Indicheremo con $H_{\Delta_n}(f,x)$ l'operatore che associa alla funzione derivabile $f(x)$ il polinomio d'interpolazione di Hermite sui nodi Δ_n . E' facile verificare che $H_{\Delta_n}(f,x)$ si può scrivere nella forma:

$$H_{\Delta_n}(f,x) = \sum_{i=0}^n h_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^n \bar{h}_i(x) f'(x_i)$$

dove

$$h_i(x) := \ell_i^2(x) (1 - 2\ell_i'(x_i)(x-x_i)) \in \pi_{2n+1}$$

$$\bar{h}_i(x) := \ell_i^2(x) (x-x_i) \in \pi_{2n+1} \quad i=0,1,\dots,n.$$

A tale scopo basta osservare che i due insiemi di polinomi soddisfano le condizioni:

$$h_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j \\ 1 & \text{per } i = j \end{cases} \quad h'_i(x_j) = 0 \quad \forall i, j$$

e

$$\bar{h}_i(x_j) = 0 \quad \forall i, j \quad \bar{h}'_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j \\ 1 & \text{per } i = j \end{cases} .$$

E' anche immediato verificare che il polinomio di Hermite è unico. Se infatti $q_{2n+1}(x) \in \pi_{2n+1}$ fosse un altro polinomio soddisfacente le condizioni

$$q_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \quad i=0,1,\dots,n.$$

$$q'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \quad i=0,1,\dots,n,$$

la differenza dei polinomi derivati $p'_{2n+1}(x) - q'_{2n+1}(x)$ si annullerebbe sui nodi e su altri n punti intercalati tra i nodi. In totale esso avrebbe $2n+1$ zeri ed, essendo di grado $2n$, dovrebbe coincidere con il polinomio nullo. Di conseguenza i due polinomi $p_{2n+1}(x)$ e $q_{2n+1}(x)$ dovrebbero differire per una costante, ma questa costante deve essere nulla.

Per quanto riguarda l'errore dell'interpolazione di Hermite, essa si può ricavare, per funzioni di classe $C^{2n+2}[a,b]$ in maniera del tutto simile a quanto fatto per l'interpolante di Lagrange. Si considera un punto $\bar{x} \in [a,b]$, diverso dai nodi Δ_n , e con esso si costruisce la funzione:

$$g(x) = f(x) - p_{2n+1}(x) - \frac{w^2(x)}{w^2(\bar{x})} (f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}))$$

dove

$$w(x) = (x-x_0)(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n).$$

Poichè $g(x)$ si annulla su $n+2$ punti, la funzione $g'(x)$ si annulla su (almeno) $n+1$ punti diversi dai nodi e da \bar{x} . D'altra parte le condizioni di interpolazione sulla derivata assicurano che $g'(x)$ si annulla anche sui nodi e quindi su un totale di almeno $2n+2$ punti distinti. Derivando successivamente la funzione $g(x)$ si conclude che $g^{(2n+2)}(x)$ si annulla in un punto $\bar{\xi}$, dipendente da \bar{x} , sul quale si ha:

$$g^{(2n+2)}(\bar{\xi}) = f^{(2n+2)}(\bar{\xi}) - \frac{(2n+2)!}{w^2(\bar{x})} (f(\bar{x}) - p_{2n+1}(\bar{x})) = 0.$$

e quindi $\forall \bar{x}$

$$f(\bar{x}) - p_{2n+1}(\bar{x}) = \frac{f^{(2n+2)}(\bar{\xi}) w^2(\bar{x})}{(2n+2)!}.$$

Dalla precedente stima puntuale dell'errore si può ricavare la stima uniforme:

$$\|f - p_{2n+1}\|_{\infty} \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_{\infty} \|w^2\|_{\infty}}{(2n+2)!}$$

Analogamente a quanto fatto per i polinomi di Lagrange, sia h la massima distanza tra due punti consecutivi dell'insieme $\{a, x_0, x_1, \dots, x_n, b\}$. Poichè $\|w\|_\infty \leq (n+1)!h^{n+1}$, la precedente stima fornisce:

$$\|f - p_{2n+1}\|_\infty \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty ((n+1)!)^2 h^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Se $x_0=a$ e $x_n=b$, la norma $\|w\|_{[x_0, x_n]} := \max_{[x_0, x_n]} |w(x)|$ può essere maggiorata con $\frac{1}{4}(n!)h^{n+1}$, dove $h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$. In questo caso vale la seguente maggiorazione:

$$\|f - p_{2n+1}\|_{[x_0, x_n]} \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_{[x_0, x_n]} (n!)^2 h^{2n+2}}{\frac{1}{16}(2n+2)!}.$$

Consideriamo ora un tipo di interpolazione più generale sui nodi Δ_n . Supponiamo che su ciascun nodo x_i si conoscano i valori della $f(x)$ e delle derivate successive fino all'ordine s_i e supponiamo che sia $r = \sum_{i=0}^n (s_i + 1)$ il numero totale di valori noti per la $f(x)$ e per le sue derivate su tutti i punti.

Si definisce **polinomio di interpolazione di Birkhoff** di $f(x)$, il polinomio $p_{r-1}(x) \in \pi_{r-1}$ che soddisfa le seguenti r condizioni interpolatorie:

$$p_{r-1}^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) \quad k = 0, 1, \dots, s_i \quad \text{per } i=0, 1, \dots, n$$

Si può dimostrare che tale polinomio, che può in particolare essere il polinomio di Lagrange o di Hermite, esiste ed è unico. Nel prossimo punto vedremo come ricavarlo.

Differenze divise e differenze finite.

Data un insieme di punti $\{x_i\}$ ed i corrispondenti valori della funzione $f(x)$, si definisce, per ciascuno punto, **differenza divisa di ordine zero** il termine:

$$f[x_i] := f(x_i)$$

e **differenza divisa di ordine uno** il termine:

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}.$$

Si definiscono ricorsivamente le **differenze divise di ordine k** i rapporti:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Teorema 5.6: *Sia data la funzione $f(x)$. Per ogni intero n e per ogni insieme di $n+1$ punti distinti x_0, x_1, \dots, x_n vale la seguente identità:*

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ & \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ & + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]. \quad \forall x \end{aligned}$$

Dim. La uguaglianza è vera per $n=0$, infatti in tal caso si riduce a

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x, x_0].$$

Supponiamo che relazione sia vera per $n=k-1$:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ & \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-2})f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] \\ & + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})f[x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}], \end{aligned} \quad (5.6)$$

dimostriamo che è vera per $n=k$. Dalla definizione di differenza divisa di ordine $k+1$ si ha:

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_k] := \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_k] - f[x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x}$$

e quindi

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] = (x - x_k) f[x, x_0, x_1, \dots, x_k] + f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

che sostituita in (5.6) fornisce la tesi.

La parte polinomiale:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots$$

$$\dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

della (5,6) è detta **polinomio di Newton**. Ogni funzione $f(x)$ si può quindi esprimere come somma del polinomio di Newton e di un resto:

$$f(x) = p_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]. \quad (5.7)$$

Evidentemente il polinomio di Newton $p_n(x)$ interpola $f(x)$ sui nodi $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e fornisce quindi una ulteriore rappresentazione del polinomio d'interpolazione di Lagrange nella seguente **base triangolare** di polinomi monici:

$$(x-x_0)$$

$$(x-x_0)(x-x_1)$$

$$\dots$$

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

I coefficienti sono dati dalle differenze successive che si possono facilmente calcolare secondo lo schema:

$$\begin{array}{ccccccc}
f(x_0) & & & & & & \\
f(x_1) & \searrow & f[x_0, x_1] & & & & \\
\dots & \searrow & f[x_1, x_2] & \searrow & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
\dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \\
f(x_n) & \searrow & f[x_{n-1}, x_n] & \searrow & \dots & \dots & \searrow & f[x_0, x_1, \dots, x_n].
\end{array}$$

Un altro vantaggio di rappresentare il polinomio d'interpolazione nella forma di Newton, risiede nel fatto che se si vuole innalzare il grado del polinomio inserendo un ulteriore nodo d'interpolazione x_{n+1} , il polinomio $p_{n+1}(x)$ assume la forma:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}].$$

per la quale è sufficiente calcolare la differenza divisa $f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}]$. Quest'ultima è facilmente ricavabile aggiungendo una riga allo schema precedente:

$$\begin{array}{ccccccc}
f(x_n) & \searrow & f[x_{n-1}, x_n] & \searrow & \dots & \searrow & f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\
f(x_{n+1}) & \searrow & f[x_n, x_{n+1}] & \searrow & \dots & \searrow & f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] & \searrow & f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}].
\end{array}$$

Osservazione. Una differenza n-esima $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ è invariante per permutazioni degli indici, cioè non dipende dall'ordine con cui sono considerati i nodi. Infatti il suo valore corrisponde al coefficiente principale del polinomio di interpolazione di Lagrange su quei nodi, che non dipende dall'ordine con cui i nodi stessi sono considerati.

Allora per ogni coppia di nodi $x_r \neq x_s$ $0 \leq r, s \leq n$, la differenza divisa $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ si può esprimere come:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n] - f[x_0, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n]}{x_s - x_r}$$

Dalla (5.7) possiamo ricavare la seguente stima della differenza (n+1)-esima

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)\dots(x - x_n)}$$

Se $f \in C^{n+1}[a,b]$ allora, in base alla conoscenza dell'errore puntuale dell'interpolazione di Lagrange, ricaviamo che $\forall x \in [a,b]$:

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (5.8)$$

dove ξ è compreso tra il minimo ed il massimo dei punti $\{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}$. In particolare, per $f \in \pi_n$, si ricava il seguente teorema:

Teorema 5.7: *Per ogni polinomio di grado n , la differenza divisa di ordine $n+1$ è nulla su qualunque insieme di nodi.*

Se in (5.8) gli $n+2$ punti relativi alla differenza $f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]$ tendono ad uno di essi, diciamo x , allora anche $\xi \rightarrow x$ e ciò suggerisce la seguente estensione della nozione di differenza divisa al caso di nodi multipli:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] := \begin{cases} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} & \text{per } x_0 = x_1 = \dots = x_n \\ \frac{f[x_0, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n] - f[x_0, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n]}{x_s - x_r} & \text{per } x_r \neq x_s \end{cases}$$

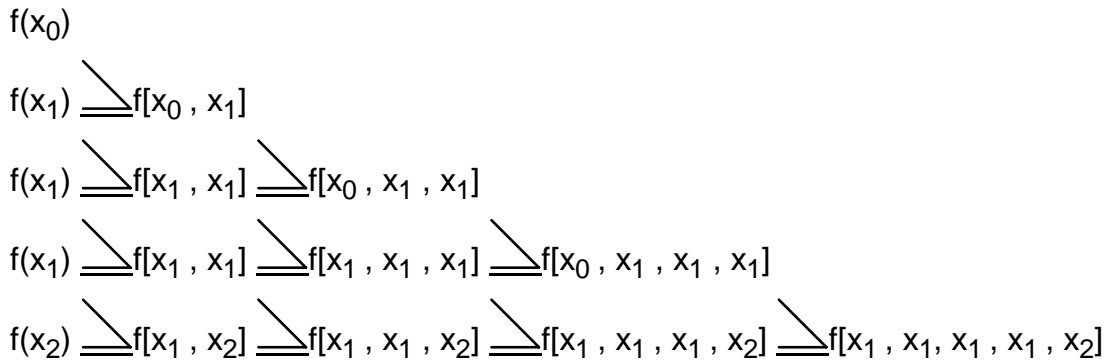
Con la precedente definizione possiamo generalizzare il polinomio di Newton al caso di nodi multipli che corrispondono ai vincoli interpolatori sui valori delle derivate successive. In particolare il polinomio d'interpolazione di Hermite si ottiene considerando tutti i nodi doppi. Se nel nodo x_i si interpolano le derivate fino all'ordine k , allora il nodo va considerato di molteplicità $k+1$.

Come esempio consideriamo i nodi x_0, x_1, x_2 e calcoliamo l'interpolante sui valori $f(x_0), f(x_1), f'(x_1), f''(x_1), f(x_2)$. Trattandosi di 5 vincoli il polinomio dovrà essere di grado 4.

Esso si rappresenta come polinomio di Newton sui nodi: $\{x_0, x_1, x_1, x_1, x_2\}$ ed assume quindi la forma:

$$p_4(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_1] + \\ (x-x_0)(x-x_1)^2f[x_0, x_1, x_1, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)^3f[x_0, x_1, x_1, x_1, x_2]$$

dove le differenze divise sono calcolate secondo lo schema:



Se i nodi sono equidistanti : $x_i = x_0 + i h$, allora le differenze divise assumono un forma particolare esprimibile attraverso le seguenti differenze finite. Per ogni punto x_k , si definisce **differenza finita di ordine zero** :

$$\Delta^0 f(x_i) := f(x_i)$$

e **differenza finita prima**:

$$\Delta^1 f(x_i) := f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

In generale si definisce **differenza finita r-esima** il termine:

$$\Delta^r f(x_i) := \Delta^{r-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{r-1} f(x_i).$$

Il legame tra le differenze divise e finite è espresso dal seguente teorema.

Teorema 5.8. Per ogni n si ha:

$$\Delta^n f(x_i) = (n!) h^n f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}]. \tag{5.9}$$

Dim. L'uguaglianza è vera per $n=1$ e supponiamo sia vera per $n=k$. Dimostriamo che è vera per $n=k+1$. Poichè

$$\Delta^{k+1} f(x_i) = \Delta^k f(x_{i+1}) - \Delta^k f(x_i),$$

per l'ipotesi induttiva si ha:

$$\begin{aligned}
 \Delta^{k+1}f(x_i) &= (k!) h^k f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k+1}] - (k!) h^k f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] \\
 &= (k!) h^k (f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k+1}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]) \\
 &= (k!) h^k f[x_i, x_{i+2}, \dots, x_{i+k+1}](x_{i+k+1}, x_i) \\
 &= (k!) h^k f[x_i, x_{i+2}, \dots, x_{i+k+1}](k+1)h \\
 &= ((k+1)!) h^{k+1} f[x_i, x_{i+2}, \dots, x_{i+k+1}]
 \end{aligned}$$

La dimostrazione è così completata.

Se $f \in C^{n+1}[a, b]$, per la (5.8) si ha $f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}$, e quindi:

$$\Delta^n f(x_i) = h^n f^{(n)}(\xi)$$

dove ξ è compreso tra il minimo ed il massimo dei punti $\{x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}\}$.

Si ha quindi, analogamente al teorema 5.7:

Teorema 5.9. *Per ogni polinomio di grado n , la differenza finita n -esima è nulla su ogni insieme di nodi equidistanti.*

In base alla relazione (5.9) il polinomio di Newton si può esprimere attraverso le differenze finite nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= f(x_0) + (x-x_0) \frac{\Delta f(x_0)}{h} + (x-x_0)(x-x_1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} + \dots \\
 &\quad \dots + (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}) \frac{\Delta^n f(x_0)}{(n!)h^n}
 \end{aligned}$$

Indicando il generico punto x con $x=x_0+mh$, $m \in \mathbb{R}$, e tenendo conto che $(x-x_i)=(m-i)h$ si ha:

$$p_n(x) = f(x_0) + \binom{m}{1} \Delta f(x_0) + \binom{m}{2} \Delta^2 f(x_0) + \dots + \binom{m}{n} \Delta^n f(x_0)$$

dove :

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$$

Interpolazione con polinomi a tratti.

Fino ad ora abbiamo considerato esclusivamente l'interpolazione con polinomi algebrici, ed abbiamo visto che, al crescere del numero dei nodi, la convergenza è assicurata solo sotto particolari ipotesi sulla regolarità della funzione e sulla distribuzione dei nodi stessi nell'intervallo di interpolazione. In particolare, non v'è alcuna distribuzione dei nodi che assicuri la convergenza per ogni funzione continua. D'altra parte, per le funzioni continue, il Teorema 5.4 ci forniva la seguente stima dell'errore in $[a,b]$:

$$\|f - L_{\Delta_n}(f)\|_{\infty} \leq E_n(f) (1 + \lambda_n)$$

dove il minimo massimo errore è a sua volta maggiorato da:

$$E_n(f) \leq 6\omega\left(f, \frac{b-a}{2n}\right).$$

Nell'interpolazione di Lagrange, si faceva crescere n e si confrontava l'ordine di infinitesimo di $E_n(f)$ con l'ordine di infinito di λ_n . Se invece teniamo fisso n , e quindi λ_n , e facciamo tendere a zero l'ampiezza dell'intervallo $[a,b]$, il minimo massimo errore è ancora infinitesimo e tale risulta l'errore d'interpolazione. Ciò suggerisce la seguente strategia di **interpolazione di Lagrange a tratti**.

Per ogni n fissato e per ogni m , consideriamo l'insieme Δ_{nm} costituito dagli $nm+1$ nodi equidistanti

$$\Delta_{nm} = \{ x_k \mid x_k = a + kh \quad k=0, 1, \dots, nm \}$$

ottenuti in corrispondenza al passo $h = \frac{b-a}{nm}$. Osservato che $x_0 = a$ e $x_{nm} = b$, suddividiamo

$[a, b]$ in m sottointervalli :

$$I_1 = [x_0, x_n], I_2 = [x_n, x_{2n}], \dots, I_m = [x_{(m-1)n}, x_{nm}],$$

ciascuno dei quali contiene $n+1$ nodi, e su ogni I_i interpoliamo $f(x)$ con un polinomio di Lagrange di grado n che indicheremo con $p_{i,n}(x)$, $i=1, 2, \dots, m$. Si ottiene così una funzione polinomiale a tratti definita su tutto l'intervallo $[a, b]$ la cui restrizione su ciascun I_i è il polinomio $p_{i,n}(x)$. Essa risulta continua su $[a, b]$ e verrà indicata con $P_{\Delta_{nm}}(f)$. Su ciascun

sottointervallo I_i , di ampiezza $nh = \frac{b-a}{m}$, l'errore d'interpolazione è dato da

$$\|f - p_{i,n}(x)\|_{I_i} \leq 6\omega\left(f, \frac{b-a}{2nm}\right) (1 + \lambda_n).$$

Di conseguenza anche per l'errore globale su $[a, b]$ si ha la maggiorazione:

$$\|f - P_{\Delta_{nm}}(f)\|_{[a,b]} \leq 6\omega\left(f, \frac{b-a}{2nm}\right) (1 + \lambda_n).$$

che è infinitesima per $m \rightarrow \infty$. E' facile capire che per ottenere un procedimento convergente non è affatto necessario che i nodi siano equidistanti. E' infatti sufficiente che, al crescere di m , la massima ampiezza dei sottointervalli I_i tenda a zero. Possiamo quindi concludere con il seguente teorema:

Teorema 5.10. *Per ogni funzione continua $f(x)$ l'interpolazione di Lagrange a tratti, di grado fissato n , converge uniformemente ad $f(x)$ per ogni suddivisione di $[a, b]$ in sottointervalli di ampiezza infinitesima.*

Si lascia al lettore la stima dell'errore nel caso che la funzione f sia holderiana o di classe $C^k[a, b]$ $k=1, 2, \dots, n+1$. In particolare, per $n=3$, si consideri l'interpolazione con **cubiche di Lagrange** e si dimostri che, per funzioni $f(x) \in C^4[a, b]$, l'errore è $O(h^4)$.

In modo analogo si può definire l' **interpolazione di Hermite a tratti** nella quale su ogni sottointervallo I_i si considera l'interpolante di Hermite di grado $2n+1$ sui nodi di I_i . Per ogni $f(x) \in C^1[a,b]$ si può osservare che l'interpolante a tratti è di classe $C^1[a,b]$, e che l'errore d'interpolazione è infinitesimo su ogni sottointervallo I_i . Vale quindi il seguente teorema:

Teorema 5.11. *Per ogni funzione $f(x) \in C^1[a,b]$ l'interpolazione di Hermite a tratti, di grado fissato n , converge uniformemente ad $f(x)$ per ogni suddivisione di $[a,b]$ in sottointervalli di ampiezza infinitesima.*

In particolare, per $n=3$, si consideri l'interpolazione con **cubiche di Hermite** e si dimostri che anche in questo caso, per funzioni $f(x) \in C^4[a,b]$, l'errore è $O(h^4)$.

Interpolazione spline.

Consideriamo un insieme di nodi $\Delta_m = \{a=x_0 < x_1 < \dots < x_m=b\}$ ed i corrispondenti sottointervalli

$$I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_m = [x_{(m-1)}, x_m].$$

Si definisce **funzione spline** di grado n su Δ_m , ogni funzione $s(x)$ del seguente sottospazio di funzioni:

$$S_{\Delta_m}^n = \{s(x) \mid s(x)|_{I_i} \in \pi_n \text{ } i=1, \dots, m; \text{ e } s(x) \in C^{n-1}[a,b]\}.$$

Una spline di grado n è quindi una funzione polinomiale a tratti di grado n , che risulta globalmente di classe $C^{n-1}[a,b]$, cioè tale che sui nodi interni siano soddisfatte le seguenti condizioni sulle derivate sinistre e destre:

$$\begin{aligned}
s(x_i)_- &= s(x_i)_+ \\
s'(x_i)_- &= s'(x_i)_+ \\
&\dots \\
s^{(n-1)}(x_i)_- &= s^{(n-1)}(x_i)_+ \quad i=1,2,\dots,m-1
\end{aligned}$$

In totale esse forniscono $n(m-1)$ condizioni di regolarità. D'altra parte, su ciascuno degli m sottointervalli il generico polinomio di grado n dipende da $n+1$ parametri. Questi $m(n+1)$ parametri devono soddisfare le $n(m-1)$ condizioni precedenti ed è quindi ragionevole aspettarsi che la dimensione del sottospazio $S_{\Delta_m}^n$ sia $m(n+1)-n(m-1)=m+n$. Una sua base si può trovare attraverso la seguente funzione di Peano:

$$(x-\bar{x})_+^n = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq \bar{x} \\ (x-\bar{x})^n & \text{per } x \geq \bar{x} \end{cases}$$

che è di classe $C^{n-1}[a,b]$ per ogni punto \bar{x} .

Le $m+n$ funzioni:

$$1, x, \dots, x^{n-1}, (x-x_0)_+^n, (x-x_1)_+^n, \dots, (x-x_{m-1})_+^n$$

sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per $S_{\Delta_m}^n$. Si ha quindi:

$$\dim(S_{\Delta_m}^n) = m+n.$$

Consideriamo il caso delle **spline cubiche** $S_{\Delta_m}^3$ ottenute per $n=3$.

Poichè $\dim(S_{\Delta_m}^3) = m+3$, imponendo le condizioni di interpolazione sui nodi $\Delta_m = \{a=x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$ rimangono 2 condizioni da imporre per determinare univocamente la spline cubica d'interpolazione. Si definiscono così le seguenti classi di spline cubiche:

spline naturali per $s''(x_0) = s''(x_m) = 0$

spline periodiche per $s'(x_0) = s'(x_m)$, $s''(x_0) = s''(x_m)$.

spline cubiche complete per $s'(x_0)$ e $s'(x_m)$ assegnati attraverso la cubica che interpola rispettivamente in x_0, x_1, x_2, x_3 e $x_{m-3}, x_{m-2}, x_{m-1}, x_m$

spline "not a knot" imponendo che in x_1 e x_{m-1} la saldatura dei tratti cubici sia di classe C^2 .

Costruzione delle spline cubiche naturali (e periodiche).

Consideriamo la restrizione della spline $s(x)$ all'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ di ampiezza h_k , ed indichiamo col pedice $()_k$ il valore delle funzioni nel punto x_k e delle sue derivate destre o sinistre a seconda del caso. Poichè la derivata seconda di una cubica è una retta, si ha:

$$s''(x) = s''_k + (x - x_k) \frac{s''_{k+1} - s''_k}{h_k} \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

Integrando tra x_k ed x , si ottiene:

$$s'(x) = s'_k + (x - x_k)s''_k + \frac{(x - x_k)^2}{2} \frac{s''_{k+1} - s''_k}{h_k} \quad (5.10)$$

ed integrando ancora:

$$s(x) = s_k + (x - x_k)s'_k + \frac{(x - x_k)^2}{2} s''_k + \frac{(x - x_k)^3}{6} \frac{s''_{k+1} - s''_k}{h_k} \quad (5.11)$$

Calcolando quest'ultima in x_{k+1} , e tenendo conto delle condizioni d'interpolazione $f(x_i) = s(x_i) \quad \forall i$, si ottiene:

$$f_{k+1} = f_k + h_k s'_k + \frac{h_k^2}{2} s''_k + \frac{h_k^3}{6} \frac{s''_{k+1} - s''_k}{h_k}$$

e quindi:

$$s'_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} - \frac{h_k}{2} s''_k + \frac{h_k}{6} (s''_{k+1} - s''_k) \quad (5.12)$$

Poichè $s''(x)$ è continua in ogni punto, la (5.12) calcolata sull'intervallo precedente fornisce:

$$s'_{k-1} = \frac{f_k - f_{k-1}}{h_{k-1}} - \frac{h_{k-1}}{2} s''_{k-1} + \frac{h_{k-1}}{6} (s''_k - s''_{k-1}) \quad (5.13)$$

mentre la (5.10), relativa anch'essa all'intervallo precedente e calcolata nel punto x_k , fornisce:

$$s'_k - s'_{k-1} = h_{k-1} s''_{k-1} + \frac{h_{k-1}^2}{2} \frac{s''_k - s''_{k-1}}{h_{k-1}} = h_{k-1} \frac{s''_k + s''_{k-1}}{2}. \quad (5.14)$$

D'altra parte sottraendo (5.13) da (5.12) e sostituendo in (5.14) si ottiene la seguente relazione che coinvolge soltanto i valori s''_k :

$$h_{k-1} s''_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k) s''_k + h_k s''_{k+1} = 6 \left(\frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_{k-1}} \right) \quad (5.15)$$

$k=1,2,\dots,m-1,$

dove $s''_0 = s''_m = 0$.

Si ottiene così un sistema lineare nelle incognite s''_k , $k=1,\dots,m-1$ con matrice di banda tridiagonale a predominanza diagonale stretta. Una volta trovato il vettore degli s''_k , si risale ad $s(x)$, per ogni sottointervallo $[x_k, x_{k+1}]$, attraverso la (5.11) dove s'_k è dato dalla (5.12). Questo modo di calcolare le spline cubiche naturali, oltre ad essere pratico per la velocità di risoluzione del sistema tridiagonale e per la semplicità di ricostruzione della spline in ogni punto, è stabile rispetto alle eventuali perturbazioni sui dati f_k .

Per la costruzione delle spline periodiche si osservi che tutti i valori s''_k $k=0,1,\dots,m$ sono incogniti. Allora alle equazioni (5.15) vanno affiancate le 2 condizioni di periodicità. La prima, $s''_0 = s''_m$, è già espressa in funzione delle incognite, mentre la seconda, $s'_0 = s'_m$, si può esprimere in funzione delle incognite osservando che si ha:

$$0 = s'_m - s'_0 = (s'_m - s'_{m-1}) + (s'_{m-1} - s'_{m-2}) + \dots + (s'_1 - s'_0)$$

dove ogni addendo $(s'_k - s'_{k-1})$ è dato dalla (5.14). In questo caso la matrice del sistema perde la struttura tridiagonale.

Analisi dell'errore delle splines naturali.

Valutiamo l'errore nel caso semplice in cui i nodi siano equidistanti e la funzione interpolanda $f(x) \in C^2[a,b]$. Calcoliamo l'errore d'interpolazione nel generico intervallo $[x_{k-1}, x_k]$. Sia $\bar{x} \in (x_{k-1}, x_k)$ e si consideri la funzione:

$$g(x) := f(x) - s(x) - \frac{(x - x_k)(x - x_{k-1})}{(\bar{x} - x_k)(\bar{x} - x_{k-1})} (f(\bar{x}) - s(\bar{x})).$$

Poichè $g(x)$ si annulla sugli estremi e su \bar{x} , $g''(x)$ si annulla in almeno un punto $\bar{\xi}_k$ e quindi, con passaggi più volte fatti in precedenza, si ottiene:

$$f(\bar{x}) - s(\bar{x}) = \frac{(\bar{x} - x_k)(\bar{x} - x_{k-1})}{2} (f''(\bar{\xi}_k) - s''(\bar{\xi}_k)) \quad \forall \bar{x} \in [x_{k-1}, x_k].$$

Poichè $s''(x)$ è un polinomio lineare, ogni suo valore è compreso tra gli estremi, quindi

$$|s''(\bar{\xi}_k)| \leq \max \{|s''_{k-1}|, |s''_k|\} \leq \max_k |s''_k| \quad \forall k.$$

D'altra parte in ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ si ha $(\bar{x} - x_{k-1})(\bar{x} - x_k) \leq \frac{h^2}{4}$ e quindi si ottiene la maggiorazione uniforme in $[a,b]$:

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{h^2}{8} (\|f''\|_\infty + \max_k |s''_k|) \quad (5.16)$$

Per ottenere infine una stima di $\max_k |s''_k|$, sia $|s''_i| = \max_k |s''_k|$. Si consideri (5.15) per $k=i$ e passo costante

$$h s''_{i-1} + 4h s''_i + h s''_{i+1} = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \right)$$

$$4h|s''_i| \leq h|s''_{i-1}| + h|s''_{i+1}| + 6|(f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1}))| \leq 2h|s''_i| + 6|(f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1}))|$$

$$h|s''_i| \leq 3|(f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1}))|$$

con $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$ e $\eta_{i-1} \in [x_{i-1}, x_i]$.

Il termine $(f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1}))$ può essere manipolato nel seguente modo:

$$|(f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1}))| = \frac{|f'(\eta_i) - f'(\eta_{i-1})|}{|\eta_i - \eta_{i-1}|} |\eta_i - \eta_{i-1}| \leq |f''(\xi)| 2h \leq 2h \|f''\|_\infty$$

da cui otteniamo:

$$|s''_i| \leq 6 \|f''\|_\infty$$

che sostituita in (5.16) fornisce la seguente maggiorazione dell'errore:

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{7}{8} h^2 \|f''\|_\infty.$$

Se $f \in C^4[a, b]$ si può dimostrare che $|f(x) - s(x)| = O(h^4)$. In entrambi i casi l'interpolazione spline è convergente.

Proprietà di minimo delle spline naturali e periodiche.

Le spline cubiche godono della seguente proprietà di "minima energia" o di "minima curvatura".

Teorema 5.11 : Tra tutte le funzioni $g(x) \in C^2[a, b]$ che interpolano i dati f_0, f_1, \dots, f_m sui nodi $\Delta_m = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$ la spline cubica naturale $s(x)$ minimizza il funzionale:

$$\int_a^b [g''(t)]^2 dt.$$

Dim. E' sufficiente dimostrare che vale l'uguaglianza:

$$\int_a^b [g''(t)]^2 dt = \int_a^b [s''(t)]^2 dt + \int_a^b [g''(t) - s''(t)]^2 dt .$$

Poichè si ha banalmente:

$$\int_a^b [g''(t) - s''(t)]^2 dt = \int_a^b [g''(t)]^2 dt - \int_a^b [s''(t)]^2 dt - 2 \int_a^b [g''(t) - s''(t)]s''(t)dt ,$$

è sufficiente dimostrare che

$$\int_a^b [g''(t) - s''(t)]s''(t)dt = 0.$$

A questo scopo scomponiamo l'integrale nel seguente modo:

$$\int_a^b [g''(t) - s''(t)]s''(t)dt = \sum_{i=0}^{m-1} I_i$$

dove $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g''(t) - s''(t)]s''(t)dt .$

Integrando per parti si ottiene:

$$I_i = [g'(t) - s'(t)]s''(t) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g'(t) - s'(t)]s'''(t)dt.$$

Poichè $s'''(t)$ è costante e $g(x_i) - s(x_i) = 0 \quad \forall i$, il secondo integrale è nullo.

Ricomponendo l'integrale si ottiene allora:

$$\sum_{i=0}^{m-1} I_i = \sum_{i=0}^{m-1} [g'(t) - s'(t)]s''(t) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = [g'(x_m) - s'(x_m)]s''(x_m) - [g'(x_0) - s'(x_0)]s''(x_0).$$

Poichè $s''(x_m) = s''(x_0) = 0$, si ha $\sum_{i=0}^{m-1} I_i = 0$ e quindi il teorema è dimostrato.

Un teorema analogo può essere dimostrato per le spline periodiche.

Teorema 5.12 : *Tra tutte le funzioni periodiche $g(x) \in C^2[a,b]$ che interpolano i dati f_0, f_1, \dots, f_m sui nodi $\Delta_m = \{a=x_0 < x_1 < \dots < x_m=b\}$ la spline cubica periodica $s(x)$ minimizza il funzionale:*

$$\int_a^b [g''(t)]^2 dt .$$

La dimostrazione è identica alla precedente fino all'ultima riga dalla quale si conclude in maniera immediata tenendo conto delle condizioni di periodicità $s'(x_m) = s'(x_0)$ ed $s''(x_m) = s''(x_0)$.

Interpolazione trigonometrica.

Consideriamo le funzioni $f(x)$ periodiche di periodo 2π ristrette all'intervallo $[-\pi, \pi]$ e interpoliamole con i polinomi trigonometrici:

$$t_{2n+1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) .$$

su un insieme di punti: $\Delta_{2n} = \{x_{-n} < x_{-n+1} < \dots < x_0 < x_1 < \dots < x_n\} \subset [-\pi, \pi)$.

Per mezzo delle formule di Eulero

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

si ricava:

$$t_{2n+1}(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

dove:

$$c_0 = a_0 \quad \text{e} \quad c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{se } k \geq 1 \\ \frac{1}{2}(a_k + ib_k) & \text{se } k \leq -1 \end{cases} \quad (5.17)$$

In questo modo le condizioni di interpolazione $t(x_j) = f(x_j) \quad j = -n, \dots, 0, \dots, n$, portano al sistema lineare:

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx_j} = f(x_j) \quad j = -n, \dots, 0, \dots, n.$$

Moltiplicando la j -esima equazione per e^{-inx_j} si ottiene:

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{i(k+n)x_j} = e^{inx_j} f(x_j) \quad j=-n, \dots, 0, \dots, n.$$

Ponendo infine $y_j = e^{ix_j}$, il determinante del sistema è un determinante di Vandermonde con coefficienti distinti e quindi l'interpolazione trigonometrica ammette soluzione unica per ogni $f(x)$. Vedremo in un prossimo paragrafo qual'è il modo migliore di calcolare il polinomio interpolante nel caso di nodi equidistanti.

3. METODI VARIAZIONALI.

Abbiamo già definito i metodi variazionali come quei metodi che approssimano la $f(x)$ in $[a,b]$ con l'elemento di minima distanza, secondo una norma prescelta, in un sottoinsieme a dimensione finita di funzioni approssimanti. Il "teorema di miglior approssimazione" garantisce l'esistenza della funzione di minimo scarto per ogni norma. In particolare per l'approssimazione con polinomi algebrici in norma lagrangiana, il teorema di Jackson fornisce le stime dell'errore per funzioni continue e per funzioni soddisfacenti vari gradi di regolarità. In questo caso la ricerca effettiva del polinomio di minimo scarto non è, in generale, facile e verrà tralasciata.

Nel caso di norme dedotte da un prodotto scalare, la teoria della miglior approssimazione prende il nome di "approssimazione ai minimi quadrati" (o "approssimazione di Fourier") e la ricerca del polinomio di minimo scarto è alquanto più semplice.

Polinomi ortogonali ed approssimazione ai minimi quadrati.

Una successione di funzioni $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x), \dots$ si dice che forma un **sistema ortogonale** se:

$$\langle \Phi_i(x), \Phi_j(x) \rangle = 0 \quad \forall i \neq j \quad , \quad \langle \Phi_i(x), \Phi_i(x) \rangle \neq 0 \quad \forall i$$

Se in particolare $\langle \Phi_i(x), \Phi_i(x) \rangle = 1 \quad \forall i$, il sistema si dice **ortonormale**. In questo caso si ha infatti $\sqrt{\langle \Phi_i(x), \Phi_i(x) \rangle} = \|\Phi_i(x)\| = 1$. Ovviamente ogni sistema ortogonale si trasforma nel

sistema ortonormale: $\frac{\Phi_n(x)}{\|\Phi_n(x)\|}$.

Supponiamo che il sistema $\{\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x), \dots\}$ sia ortonormale.

Consideriamo un polinomio generalizzato $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi_i(x)$ e, per una assegnata funzione

$f(x)$, indichiamo con $p_n^*(x) = \sum_{i=0}^n a_i^* \Phi_i(x)$ il polinomio di minimo scarto (nella norma dedotta

dal prodotto scalare) che sappiamo esistere. Per $p_n^*(x)$ vale il seguente teorema di caratterizzazione.

Teorema 5.13. *Il polinomio $p_n^*(x)$ è di minimo scarto da $f(x)$ se e solo se i suoi coefficienti sono: $a_i^* = \langle f, \Phi_i \rangle$.*

Dim. Consideriamo il generico polinomio $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi_i(x)$. Per esso si ha:

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \sum_{i=0}^n a_i \Phi_i(x) \right\|^2 &= \left\langle f(x) - \sum_{i=0}^n a_i \Phi_i(x), f(x) - \sum_{i=0}^n a_i \Phi_i(x) \right\rangle \\ &= \langle f(x), f(x) \rangle + \sum_{i=0}^n a_i^2 - 2 \left\langle f(x), \sum_{i=0}^n a_i \Phi_i(x) \right\rangle \\ &= \|f\|^2 + \sum_{i=0}^n a_i^2 - 2 \sum_{i=0}^n a_i \langle f(x), \Phi_i(x) \rangle + \sum_{i=0}^n (\langle f(x), \Phi_i(x) \rangle)^2 \\ &\quad - \sum_{i=0}^n (\langle f(x), \Phi_i(x) \rangle)^2 \\ &= \|f\|^2 + \sum_{i=0}^n (a_i - \langle f(x), \Phi_i(x) \rangle)^2 - \sum_{i=0}^n (\langle f(x), \Phi_i(x) \rangle)^2. \end{aligned}$$

L'ultima espressione è minima se e solo se $a_i = a_i^* = \langle f(x), \Phi_i(x) \rangle$ ■.

Il precedente teorema fornisce anche una dimostrazione di unicità dell'elemento di minimo scarto nel caso di norme dedotte da prodotti scalari. I coefficienti $a_i^* = \langle f(x), \Phi_i(x) \rangle$ sono detti **coefficienti di Fourier**, ed il polinomio di minimo scarto:

$$p_n^*(x) = \sum_{i=0}^n \langle f(x), \Phi_i(x) \rangle \Phi_i(x)$$

e detto anche **polinomio di Fourier** di $f(x)$. Se $n \rightarrow \infty$ il polinomio si trasforma nella **serie di Fourier** di $f(x)$ ed ogni suo troncamento rappresenta il polinomio di miglior approssimazione di quel grado per $f(x)$, nella norma dedotta dal prodotto scalare.

Abbiamo già incontrato i polinomi di Chebyshev $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ $-1 \leq x \leq 1$, che costituiscono l'esempio più classico di polinomi algebrici ortogonali. Essi sono infatti ortogonali rispetto al seguente prodotto scalare:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_m(t) T_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n \\ \pi & \text{per } m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{per } m = n > 0 \end{cases}$$

Altri polinomi algebrici classici sono i polinomi $P_n(x)$ di Legendre, $L_n(x)$ di Laguerre, ed $H_n(x)$ di Hermite che sono ortogonali nei prodotti scalari, rispettivamente:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} e^{-t} f(t)g(t)dt$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t)g(t)dt .$$

La trasformata discreta di Fourier e la FFT (Fast Fourier Transform)

Un'altro sistema classico è costituito dalle funzioni circolari:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \dots \quad (5.18)$$

che risultano ortonormali rispetto al prodotto scalare $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.

Accanto al precedente prodotto scalare *continuo* consideriamo il seguente prodotto scalare *discreto*:

$$\langle f, g \rangle_d = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f(x_j)g(x_j) \tag{5.19}$$

costruito sui seguenti $2n+1$ nodi equidistanti, inclusi in $]-\pi, \pi[$:

$$x_j = \frac{2\pi j}{2n+1} \text{ per } j=-n, \dots, 0, \dots, n.$$

Si dimostra che le prime $2n+1$ funzioni del sistema ortonormale (5.18) sono ortonormali anche nel prodotto scalare discreto (5.19). Ciò discende dal seguente teorema valido per funzioni a valori complessi:

Teorema 5.14. *Le funzioni complesse $\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ $k=-n, \dots, 0, \dots, n$ sono ortonormali nel prodotto scalare discreto:*

$$\langle f, g \rangle_d = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f(x_j) \overline{g(x_j)}$$

Dim. Applicando direttamente la definizione di prodotto scalare si ottiene:

$$\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle_d = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \frac{e^{\frac{2kj\pi}{2n+1}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{2hj\pi}{2n+1}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \left(e^{\frac{2(k-h)\pi_j}{2n+1}} \right)^j$$

Se $h=k$ ogni elemento della sommatoria è uguale ad 1 e quindi :

$$\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle_d = 1.$$

Se $h \neq k$ dalla precedente formula si ricava:

$$\langle \varphi_k, \varphi_h \rangle_d = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{2n} \left(e^{\frac{2(k-h)\pi_j}{2n+1}} \right)^{j-n} = \frac{1}{2n+1} \left(e^{\frac{2(k-h)\pi}{2n+1}} \right)^{-n} \sum_{j=0}^{2n} \left(e^{\frac{2(k-h)\pi_j}{2n+1}} \right)^j =$$

$$\frac{1}{2n+1} \left(e^{\frac{2(k-h)\pi_i}{2n+1}} \right)^{-n} \frac{e^{2(k-h)\pi i} - 1}{e^{\frac{2(k-h)\pi_i}{2n+1}} - 1} = 0.$$

Utilizzando le formule di Eulero si dimostra facilmente il seguente teorema, analogo al precedente, sull'ortogonalità del sistema di funzioni reali (5.18).

Teorema 5.15. Per ogni n , le $2n+1$ funzioni:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$$

sono ortonormali nel prodotto scalare discreto (5.19).

$$\text{Dimostriamo che } \left\langle \frac{\text{sen}(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(hx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle_d = \begin{cases} 0 & \text{per } h \neq k \\ 1 & \text{per } h = k \end{cases}.$$

Per la (5.19) il prodotto scalare lo scrivo come:

$$\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \frac{\text{sen}(kx_j)}{\sqrt{\pi}} \frac{\text{sen}(hx_j)}{\sqrt{\pi}}$$

e, applicando le formule di Eulero:

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \frac{e^{ikx_j} - e^{-ikx_j}}{2i\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{ihx_j} - e^{-ihx_j}}{2i\sqrt{\pi}} = \\ & = -\frac{1}{2} \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \left(\frac{e^{ikx_j} e^{ihx_j}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{ikx_j} e^{-ihx_j}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{-ikx_j} e^{ihx_j}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-ikx_j} e^{-ihx_j}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}} \right) = \\ & \frac{-1}{2} \cdot \left(\left\langle \frac{e^{ikx_j}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{ihx_j}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_d - \left\langle \frac{e^{ikx_j}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{-ihx_j}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_d - \left\langle \frac{e^{-ikx_j}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{ihx_j}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_d + \left\langle \frac{e^{-ikx_j}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{-ihx_j}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_d \right) \end{aligned}$$

Per l'ortonormalità del sistema $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ $k=-n, \dots, 0, \dots, n$, si ottiene la tesi. In modo

analogo si dimostra l'ortonormalità dell'intero sistema.

I precedenti teoremi ci permettono di stabilire un importante risultato che mette in relazione i polinomi trigonometrici di interpolazione con quelli di minimo scarto.

Teorema 5.16. *Per ogni funzione f definita in $[-\pi, \pi]$ il polinomio trigonometrico d'interpolazione sui nodi equidistanti*

$$x_j = \frac{2\pi j}{2n+1} \quad \text{per } j=-n, \dots, 0, \dots, n$$

coincide col polinomio di minimo scarto nella norma discreta

$$\langle f, g \rangle_d = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f(x_j)g(x_j).$$

In altre parole i coefficienti a_k e b_k del polinomio d'interpolazione

$$t_{2n+1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

ed i coefficienti a_k^ e b_k^* del polinomio di minimo scarto*

$$t_{2n+1}^*(x) = \frac{a_0^*}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^n a_k^* \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} + b_k^* \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}$$

sono legati dalle relazioni:

$$a_0 = \frac{a_0^*}{\sqrt{2\pi}}; \quad a_k = \frac{a_k^*}{\sqrt{\pi}}, \quad b_k = \frac{b_k^*}{\sqrt{\pi}} \quad k=1, \dots, n$$

Dim. La dimostrazione segue immediatamente dal fatto che la norma discreta del residuo $f(x) - t_{2n+1}$ si esprime con:

$$\|f(x) - t_{2n+1}(x)\|_d = \sqrt{\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=-n}^n |f(x_j) - t_{2n+1}(x_j)|^2}$$

E' evidente che il minimo viene ottenuto dal polinomio d'interpolazione per il quale il residuo è nullo. Poichè il polinomio d'interpolazione è unico esso coincide con quello di minimo scarto.■

Il teorema appena dimostrato ci consente di dare l'espressione esplicita dei coefficienti del polinomio d'interpolazione in funzione di un insieme arbitrario di valori f_j $j=-n, \dots, 0, \dots, n$ pensati come valori $f(x_j)$ nei punti nodali:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle_d = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f_j \quad (5.20)$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \rangle_d = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f_j \cos\left(\frac{2\pi k j}{2n+1}\right) \quad k=1, \dots, n \quad (5.21)$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}} \rangle_d = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f_j \sin\left(\frac{2\pi k j}{2n+1}\right) \quad k=1, \dots, n \quad (5.22)$$

Le relazioni (5.20)-(5.22) che ai $2n+1$ valori assegnati f_j , associano i $2n+1$ coefficienti a_k e b_k costituiscono la **trasformata discreta di Fourier** o, più brevemente, **DFT (Discrete Fourier Transform)**.

Viceversa la relazione che associa ai coefficienti a_k e b_k i valori f_j è detta **antitrasformata discreta di Fourier**, **IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform)** :

$$f_j = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{2\pi k j}{2n+1}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k j}{2n+1}\right)$$

Qualche volta (per esempio nel MATLAB), la trasformata si esprime in forma esponenziale e fornisce i coefficienti complessi c_k che, come abbiamo visto, sono legati ai coefficienti a_k e b_k dalla (5.17).

Detto $N=2n+1$, osserviamo che la DFT richiede N moltiplicazioni per il calcolo di ciascun coefficiente, per un totale di N^2 moltiplicazioni. Confrontato con la complessità computazionale della risoluzione di un sistema lineare di dimensione N , che è dell'ordine di $N^3/3$, l'uso della DFT rappresenta già un vantaggio in termini di tempo di calcolo. Ulteriori riduzioni sono intuibili a causa della simmetria e di altre proprietà delle funzioni

circolari. Già nel 1866 Gauss proponeva un metodo di calcolo che riduceva, in qualche misura, il numero di operazioni. Ma solo negli anni '60 si otteneva un algoritmo ottimale, dovuto a Tukey e Cooley, che riduce il numero di moltiplicazioni da N^2 a $N \cdot \log_2 N$. Tale algoritmo è noto come **trasformata rapida di Fourier** o, in breve, **FFT (Fast Fourier Transform)**. Si osservi che per un insieme di 1024 dati la FFT riduce il numero di moltiplicazioni di un fattore 100.

Una importante applicazione della FFT è la ricerca di cicli e sottocicli in un insieme di $N=(2n+1)$ dati sperimentali f_j ; quali, per esempio, il campionamento di un segnale. Ciò si fa attraverso il calcolo dei numeri $|c_k|^2$ o equivalentemente di $1/4(a_k^2 + b_k^2)$, $k=1, \dots, n$ che costituiscono il **periodogramma** dei dati. La presenza di qualche picco in corrispondenza a certi valori di k corrisponde alla presenza di una forte componente di frequenza k , cioè tale che realizza k cicli periodici sugli N dati. Il numero N/k è la periodicità di quella componente.