Soluzioni

Gorizia, 24 Gennaio 2019

Esercizio 1. Siano S_5, S_8 e S_{40} le somme dei numeri da 1 a 999 che sono multipli di 5, 8 e 40 rispettivamente. Per il principio di inclusione-esclusione la quantità cercata è data da

$$S_5 + S_8 - S_{40}$$

Per calcolare S_5, S_8 e S_{40} ricordiamo che per un qualsiasi numero intero n la somma di tutti i numeri da 1 a n è data alla formula

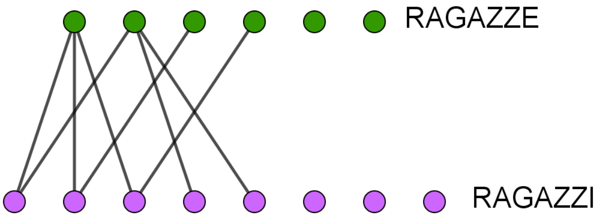
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Da questa formula deduciamo che

$$\begin{aligned} S_5 &= 5 + 10 + 15 + \cdots + 995 = 5(1 + 2 + \cdots + 199) = 5 \cdot \frac{199 \cdot 200}{2} = 99500 \\ S_8 &= 8 + 16 + 24 + \cdots + 992 = 8(1 + 2 + \cdots + 124) = 8 \cdot \frac{124 \cdot 125}{2} = 62000 \\ S_{40} &= 40 + 80 + \cdots + 960 = 40(1 + 2 + \cdots + 24) = 40 \cdot \frac{24 \cdot 25}{2} = 12000. \end{aligned}$$

La risposta è quindi $99500 + 62000 - 12000 = 149500$.

Esercizio 2. Sia G il numero di ragazze e B il numero di ragazzi. Dai dati del problema è noto che il numero totale di studenti $n = G + B$ è un numero compreso tra 31 e 38 (inclusi). La situazione delle amicizie può essere rappresentata disegnando un pallino verde per ogni ragazza e un pallino viola per ogni ragazzo e congiungendo due pallini di colore diverso con una linea nel caso in cui ci sia una relazione di amicizia tra i due studenti considerati.



Proviamo a contare il numero ℓ di linee che si vengono così a formare. Questo si può fare in due modi diversi:

- Guardando solo ai pallini verdi, osserviamo che siccome ogni ragazza è amica di esattamente 3 ragazzi, da ogni pallino verde partiranno esattamente 3 linee. Quindi il numero di linee è dato da $\ell = 3G$.

- In modo analogo, limitandoci ad osservare i pallini viola, sappiamo che da ogni pallino viola partono esattamente 2 linee. Quindi il numero di linee è dato da $\ell = 2B$.

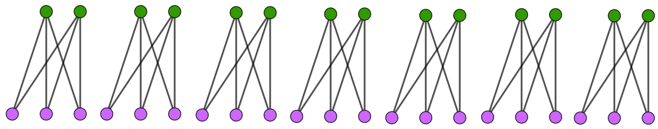
Abbiamo quindi dimostrato che

$$3G = \ell = 2B \tag{2}$$

da cui $B = \frac{3}{2}G$. Il numero totale di studenti sarà quindi

$$n = B + G = \frac{3}{2}G + G = \frac{5}{2}G$$

(osserviamo che questo numero è effettivamente un intero, perché la relazione (2) ci dice anche che G è un numero pari). Da questa equazione si deduce che n deve essere multiplo di 5. Siccome $31 \leq n \leq 38$ l'unica possibilità è che sia $n = 35$ (da cui si ricava anche che $G = \frac{2}{5}n = 14$ e $B = \frac{3}{2}G = 21$). Questa situazione è verificata ad esempio nella rappresentazione sotto.



La risposta è quindi $n = 35$.

Esercizio 3. La password è composta da tre lettere M, due lettere A e dalle cifre 0,1,...,9, una delle quali è ripetuta due volte. Ci sono dunque 10 casi a seconda della scelta della cifra da ripetere. Per ciascuno di questi 10 casi ci sono lo stesso numero di possibili password quindi, senza perdere generalità, possiamo immaginare che la cifra ripetuta sia ad esempio il 9 e poi alla fine occorrerà moltiplicare il risultato ottenuto per 10. Poiché le due cifre 9 non possono essere vicine, non tutte le permutazioni dei caratteri a disposizione vanno bene. Il numero di password accettabili può essere calcolato per differenza, sottraendo dal numero P di password ottenibili senza tener conto di quest'ultima richiesta il numero PV delle password in cui le due cifre 9 sono vicine. Calcoliamo innanzitutto P. Si tratta di calcolare il numero di permutazioni di 16 oggetti e dividerlo per il numero di modi di permutare tra loro le tre lettere M, le due A e i due 9, è dato dunque da

$$P = \frac{16!}{3!2!2!}.$$

Il numero PV di password in cui i due 9 sono vicini può essere calcolato immaginando che i due 9 formino un unico carattere:

$$PV = \frac{15!}{3!2!}.$$

Quindi il numero di password accettabili contenenti due cifre 9 è dato da

$$P - PV = \frac{16!}{3!2!2!} - \frac{15!}{3!2!} = \frac{15!}{3!2!} \cdot 7.$$

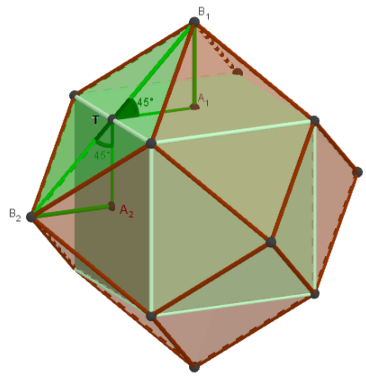
Quindi, ricordando di ripetere lo stesso ragionamento anche nel caso in cui si ripetano le cifre 0,1,2,...,8, il numero di password possibili è

$$10 \cdot \frac{15!}{3!2!} \cdot 7 = \frac{15!}{3!2!} \cdot 70.$$

La probabilità di indovinare la password è quindi $\frac{1}{\frac{15!}{3!2!} \cdot 70} = \frac{12}{15! \cdot 70}$.

Esercizio 4. I numeri cercati possono terminare con 22, 26, 62 o 66. Quindi in ogni caso si tratta di numeri pari. Dal momento che devono essere cubi perfetti devono anche essere divisibili per 8. In particolare saranno multipli di 4. Tuttavia, se un numero è multiplo di 4 anche le sue ultime due cifre lo sono. Infatti, ogni intero n le cui ultime due cifre sono il numero b si può scrivere nella forma $n = 100k + b$ per qualche intero $k \geq 0$. Quindi se n è multiplo di 4, anche $b = n - 100k$ lo è. Dal momento che nessuno dei numeri 22, 26, 62, 66 è divisibile per 4 , deduciamo che non esistono numeri che rispettano le richieste del problema. Quindi la risposta è 0.

Esercizio 5. Consideriamo due facce adiacenti del cubo e siano A_1 e A_2 i loro centri e siano B_1 e B_2 i vertici delle piramidi che le sormontano. Sia inoltre T il punto medio del lato che queste due facce hanno in comune. Dal momento che le piramidi hanno altezza pari alla metà del cubo, i triangoli A_1TB_1 e A_2TB_2 sono entrambi rettangoli e isosceli, con i due cateti uguali alla metà del lato del cubo. Di conseguenza gli angoli $\widehat{B_1TA_1}$ e $\widehat{B_2TA_2}$ sono uguali a 45°.



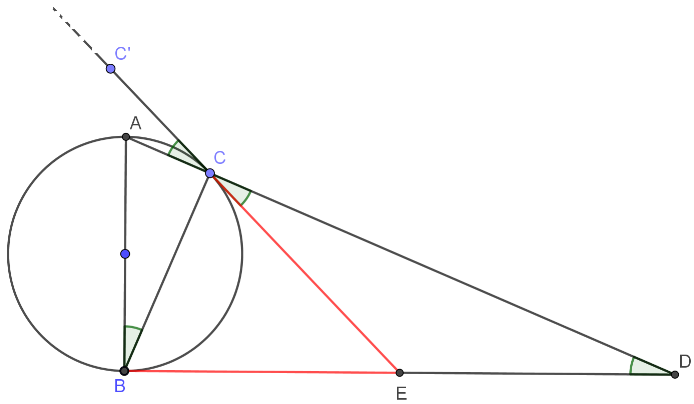
Quindi l'angolo $\widehat{B_1TB_2}$ misura $90° + 45° + 45° = 180°$, ovvero i punti B_1, T e B_2 sono allineati. Per simmetria questo dimostra che le due facce delle piramidi di vertici B_1 e B_2 considerate giacciono su uno stesso piano. Questo ragionamento può essere ripetuto chiaramente per tutte le facce del cubo adiacenti, quindi tutte le facce della torta sono dei rombi, ciascuno dei quali ha la diagonale minore coincidente con uno spigolo del cubo e la diagonale maggiore che è la congiungente tra i vertici di piramidi adiacenti. Quindi il dolce va servito poggiando una di queste facce a forma di rombi sul piatto rotondo. Quindi il piatto deve avere diametro pari almeno alla diagonale maggiore. Utilizzando il Teorema di Pitagora sui triangoli A_1TB_1 e A_2TB_2 si trova che la diagonale maggiore misura $2 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Esercizio 6. Se in notazione decimale i numeri m e n si scrivono rispettivamente come ab e cd si ha che $m = 10a + b$ e $n = 10c + d$. I numeri m' e n' ottenuti scambiando fra loro le prime cifre saranno quindi $m' = 10c + b$ e $n' = 10a + d$. Questi numeri soddisfano le condizioni del problema se $mn = m'n'$, ovvero se

$$(10a + b)(10c + d) = (10c + b)(10a + d)$$
$$\Updownarrow$$
$$100ac + 10ad + 10bc + bd = 100ac + 10ab + 10dc + bd$$
$$\Updownarrow$$
$$(a - c)(d - b) = 0.$$

Dall'ultima uguaglianza deduciamo che deve essere o $a = c$ oppure $b = d$. Utilizziamo il principio di inclusione-esclusione per contare il numero di coppie (ordinate!) (m, n) che soddisfano questa proprietà. Le coppie di numeri (m, n) tali che m e n hanno la prima cifra uguale sono $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$, perchè ci sono 9 modi per scegliere la prima cifra (che deve essere non nulla), 10 modi per scegliere la seconda cifra di m e altri 10 per scegliere la seconda cifra di n. Analogamente le coppie (m, n) tali che m e n hanno la stessa cifra delle unità sono $9 \cdot 9 \cdot 10 = 810$. In questo modo abbiamo però contato due volte le coppie (m, n) tali che m e n sono uguali, che sono 90. Quindi la risposta è data da $900 + 810 - 90 = 1620$.

Esercizio 7. Sia C' un punto sulla retta EC tale che C si trovi tra C' ed E.



Gli angoli $\widehat{C'CA}$ e $\widehat{ABC}$ sono uguali, perché insistono sulla stessa corda AC. Osserviamo inoltre che siccome AB è diametro, il triangolo ACB è rettangolo in C. Poiché anche il triangolo ABD è rettangolo si ha che

$$\widehat{CDE} = 90^\circ - \widehat{CAB} = \widehat{ABC} = \widehat{C'CA} = \widehat{DCE}.$$

Quindi il triangolo DCE è isoscele e $ED = EC$. Dal momento che EC ed EB sono le tangenti da E alla circonferenza sono uguali, quindi $EB = EC = ED = 3$. Quindi il segmento BD misura 6 e dunque l'area del triangolo rettangolo ABD è

$$A = \frac{BD \cdot AB}{2} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21.$$

Esercizio 8. I punti di intersezione dei fili di lana sono in biezione con le quaterne (non ordinate) di punti diversi sulla circonferenza. Infatti, dal momento che coppie di fili di lana distinte si intersecano in punti distinti, preso un qualunque punto di incrocio esso determina in maniera univoca i due fili di lana che si intersecano su di esso e di conseguenza sono determinati anche i quattro chiodini agli estremi di questi fili di lana. Inoltre presi 4 chiodini qualsiasi sulla circonferenza, essi formano sempre un quadrilatero convesso, le cui diagonali si intersecano all'interno della circonferenza. Quindi il numero di gomme da masticare è uguale al numero di modi di scegliere 4 chiodini qualsiasi dai 37 disposti sulla circonferenza, ovvero $\binom{37}{4} = 66045$.

Esercizio 9. Osserviamo innanzitutto che il polinomio ha radici reali per ogni scelta di $a \in \mathbb{R}$. Infatti

$$\Delta = (a-2)^2 + 4(a+1) = a^2 + 8 > 0. \tag{3}$$

È noto che, in un polinomio monico[1] di secondo grado, il coefficiente del termine di primo grado è pari all'opposto della somma delle radici, mentre il termine noto è pari

[1] Ovvero tale che il coefficiente del termine di secondo grado è uguale a 1.

al prodotto delle radici. Chiamando x_1 ed x_2 le due radici del polinomio, si ha quindi

$$x_1 + x_2 = a - 2 \tag{4}$$
$$x_1 x_2 = -a - 1. \tag{5}$$

Da ciò si ottiene che

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a-2)^2 + 2(a+1) = a^2 - 2a + 5 = (a-1)^2 + 4. \tag{6}$$

Il valore minimo di questa ultima espressione è chiaramente 4 che si ottiene per $a = 1$.

Esercizio 10.

$$\frac{4n + 2025}{2n + 3} = \frac{2(2n+3) - 6 + 2025}{2n + 3} = 2 + \frac{2019}{2n+3}.$$

Affinché questo numero sia intero $2n + 3$ deve essere un divisore (positivo o negativo!) di 2019, quindi può essere

$$\pm 1, \pm 3, \pm 673, \pm 2019.$$

Per ciascuno di questi 8 numeri esiste un intero n tale che $2n + 3$ sia ad esso uguale (perchè?) quindi la risposta è 8.

Esercizio 11. Siano $a_1, a_2, \dots, a_F$ le età delle ragazze e siano $b_1, b_2, \dots, b_M$ le età dei ragazzi (dove F e M sono il numero delle ragazze e dei ragazzi rispettivamente). I dati del problema relativi alle medie delle età delle ragazze e dei ragazzi possono essere riscritti come

$$\begin{aligned} &\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_F}{F} = 17,5 \qquad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_F = 17,5\ F \\ &\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_M}{M} = 16 \qquad \Rightarrow \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_M = 16\ M \end{aligned} \tag{7}$$

Sappiamo inoltre che

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_F + b_1 + b_2 + \cdots + b_M}{F + M} = 17. \tag{8}$$

Sostituendo le espressioni in (7) nella (8) si trova

$$\frac{17,5\ F + 16\ M}{F + M} = 17 \qquad \Rightarrow \quad M = \frac{F}{2}.$$

Di conseguenza la percentuale di ragazze presenti nella scuola è $\frac{F}{F+M} = \frac{2}{3} = 66,\bar{6}\%$.

Esercizio 12. Ricordando la formula (1) possiamo scrivere la somma cercata in forma compatta come

$$\begin{aligned} 1 + (1+2) + \cdots + (1 + \cdots + 1918) &= \sum_{n=1}^{1918} (1 + \cdots + n) \\ &= \sum_{n=1}^{1918} \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Utilizzando le proprietà distributiva e associativa della somma possiamo riscrivere la quantità a destra come

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{1918} \frac{1}{2}(n+n^2) = &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{1918} n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{1918} n^2 \\ &= \frac{1}{2}(1+2+\cdots+1918) + \frac{1}{2}(1^2+2^2+3^3+\cdots+1918^2).\end{aligned}$$

Utilizzando di nuovo la formula (1) per calcolare il primo pezzo e la formula

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

per calcolare la somma dei primi k quadrati perfetti, si trova

$$\begin{aligned}1+(1+2)+\cdots+(1+\cdots+1918) &= \frac{1}{2}(1+2+\cdots+1918) + \frac{1}{2}(1^2+2^2+3^3+\cdots+1918^2) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1918\cdot 1919}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1918\cdot 1919\cdot 3837}{6} \\ &= \frac{1918\cdot 1919}{4}(1279+1) = 1918\cdot 1919\cdot 320.\end{aligned}$$

Non occorre fare il calcolo per vedere che questo numero è formato da 10 cifre.

Esercizio 13. Il numero di zeri con cui termina 2019! è pari alla massima potenza di 10 che lo divide. Questa si ottiene calcolando quali sono le potenze di 2 e di 5 che compaiono nella scomposizione in fattori primi di 2019!; la potenza di 10 cercata ha esponente pari al minimo tra gli esponenti di 2 e di 5. Tra i due, l'esponente minore è quello relativo al 5 (perché?), quindi occorre calcolare quest'ultimo.

Poiché 2019! è il prodotto dei naturali da 1 a 2019, per calcolare qual è la massima potenza di 5 che lo divide, occorre solo considerare qual è la massima potenza di 5 che divide il prodotto di tutti i multipli di 5 compresi tra 1 e 2019. L'esponente cercato è quindi la somma degli esponenti di 5 nella scomposizione in primi di questi multipli di 5. Questa somma si può calcolare nel seguente modo:

- Ci sono 403 multipli di 5 compresi tra 1 e 2019. Non considerando, per il momento, che tra questi ci sono anche multipli di potenze di 5 maggiori, questi 403 multipli danno un contributo pari a 403 all'esponente di 5 in 2019!.

- Occorre poi considerare i multipli di 5^2. Il numero di multipli di 25 minori o uguali a 2019 è 80. Questi danno un ulteriore contributo alla somma che stiamo calcolando pari ad 80 (in quanto, per ognuno di essi, uno dei fattori 5 è già stato contato al passo precedente).

- I multipli di 5^3 minori o uguali a 2019 è 16. Ognuno di essi dà un ulteriore contributo al totale pari a 16, in quanto, per ognuno di essi, due dei fattori 5 sono stati conteggiati nei passi precedenti.

- Ci sono 3 multipli di 5^4 minori o uguali a 2019. Ognuno di questi dà un ulteriore contributo alla somma pari a 3.

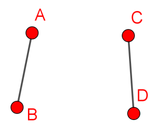
La massima potenza di 5 che divide 2019! ha esponente quindi pari a

$$403 + 80 + 16 + 3 = 502.$$

Esercizio 14. Come nell'esercizio 2, possiamo rappresentare la situazione della festa utilizzando pallini e linee (questa cosa si dice rappresentare con un *grafo* il problema). In particolare ci sono 2019 pallini (le persone) e disegniamo una linea tra due persone se queste *non* si conoscono. In questo modo, se da una persona P parte almeno una linea, vuol dire che esiste almeno una persona che P non conosce. Coloriamo in rosso i pallini da cui parte almeno una linea. Il problema è quindi equivalente a cercare il massimo numero di pallini rossi che è possibile avere nella situazione descritta. Osserviamo innanzitutto che in questo grafo i pallini rossi non possono essere isolati da tutti gli altri, dato che se un pallino è rosso vuol dire che esiste almeno una linea che parte da esso (e che va a finire su un altro pallino rosso). Quindi preso un pallino rosso, da qualche parte ci sarà un altro pallino rosso ad esso collegato. Prendiamo quindi una coppia di pallini rossi A e B collegati fra loro. Supponiamo che i pallini rossi siano almeno 4. Si presentano 2 casi:

- Esiste un pallino C (diverso da A e B) che non è collegato ad A e B.

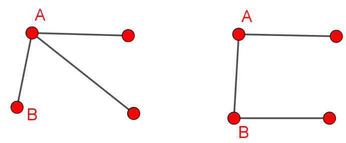
  Siccome i rossi non possono essere isolati, esisterà un quarto pallino rosso D che è collegato con D, come in figura.

  Ma allora si avrebbe un assurdo, infatti nel gruppo di persone A, B, C, D, nessuna di esse conosce tutti gli altri tre.

- Tutti gli altri pallini rossi sono collegati ad A o a B.

  Allora, prendendone due qualsiasi di essi si avrebbe una delle situazioni rappresentate in figura. Anche in questo caso si avrebbe un assurdo.

Abbiamo dimostrato dunque che assumendo che esistano almeno 4 pallini rossi si giunge sempre ad un assurdo. Quindi i rossi possono essere al massimo 3. In effetti costruendo un grafo in cui ci sono 3 rossi collegati fra loro e 2016 altri punti senza collegamenti tutte le ipotesi del problema sono soddisfatte. Tornando alla festa, questo vuol dire che ci sono tre persone che non si conoscono fra loro e altre 2016 persone che conoscono tutti. La risposta è quindi 2016.

Esercizio 15. Dall'equazione data si deduce che $2+11b^2$ è multiplo di 5. Consideriamo il resto di b nella divisione per 5.

Nota generale. *Se x e y sono due interi che danno resto α e β rispettivamente nella divisione per un qualche intero m, allora il loro prodotto xy darà lo stesso resto di $\alpha\beta$ e la loro somma $x+y$ darà lo stesso resto di $\alpha+\beta$ nella divisione per m.*

Di conseguenza, il resto nella divisione per 5 di b^2 sarà uguale al quadrato del resto della divisione per 5 di b. Ci sono dunque 5 casi:

- b dà resto 0, quindi b^2 è multiplo di 5. Allora $b^2 + 2$ non può essere multiplo di 5.
- b dà resto 1, quindi anche b^2 da resto 1. Allora, per quanto detto prima, $b^2 + 2$ darà resto 3, quindi non può essere multiplo di 5.
- b dà resto 3, quindi b^2 dà resto 9 e $b^2 + 2$ darà resto 11, quindi non è multiplo di 5.
- b dà resto 4, quindi b^2 dà resto 16 e $b^2 + 2$ darà resto 18, quindi non è multiplo di 5.

Dato che in nessun caso $b^2 + 2$ è multiplo di 5 l'equazione non ha alcuna soluzione.

Esercizio 16. Proviamo a capire qualcosa dei primi termini della successione. Considerando ad esempio x_2 e x_1, sappiamo per ipotesi che esisterà un qualche termine x_k tale che $x_2 = x_1 + x_k$. Dal momento che i termini della successione sono tutti positivi x_k deve essere più piccolo di x_2, quindi deve essere per forza x_1 (che è l'unico termine della successione più piccolo di x_2). Quindi troviamo che

$$x_2 = 2x_1 \qquad (P_2)$$

Consideriamo ora x_3 e x_1. Per ipotesi esiste x_k tale che $x_3 = x_1 + x_k$. Deduciamo ancora che x_k deve essere inferiore a x_3, quindi può essere x_1 oppure x_2. Se fosse $x_k = x_1$ si troverebbe $x_3 = x_1 + x_1 = 2x_1$. Ma per la (P_2) sappiamo che anche $x_2 = 2x_1$, quindi si avrebbe $x_3 = x_2$, che sarebbe in contraddizione col fatto che i termini della successione sono tutti diversi. Di conseguenza deve essere $x_k = x_2 = 2x_1$. Quindi deduciamo che

$$x_3 = 3x_1 \qquad (P_3)$$

Comincia a delinearsi la possibilità che per ogni n si abbia

$$x_n = nx_1 \qquad (P_n)$$

Per essere sicuri occorre dimostrare questo fatto *per induzione*, ovvero dimostrare che se supponiamo vere le formule $(P_1), (P_2), (P_3), (P_4), \dots, (P_n)$ allora riusciamo a dimostrare anche la successiva (P_{n+1}):

$$x_{n+1} = (n+1)x_1 \qquad (P_{n+1})$$

In questo modo, visto che sappiamo che la (P_2) è vera, riusciamo a dimostrare (P_n) per tutti gli n fino a 2019, perché ogni uguaglianza implica la successiva, come fossero le tessere di un domino. Supponiamo dunque che sia vera la formula (P_k) per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ e cerchiamo di dimostrare (P_{n+1}).

$$\begin{cases} x_1 = 1x_1 & (P_1) \\ x_2 = 2x_1 & (P_2) \\ \vdots & \\ x_n = nx_1 & (P_n) \end{cases} \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad x_{n+1} = (n+1)x_1 \qquad (P_{n+1})$$

Consideriamo i due termini della successione x_1 e x_{n+1}. Per ipotesi sappiamo che esiste un certo x_k tale che $x_{n+1} = x_1 + x_k$. Anche in questo caso osserviamo che x_k deve essere più piccolo di x_{n+1}, quindi sarà uno tra $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ma per tutti questi termini stiamo ipotizzando che valga la formula, quindi $x_k = kx_1$. Di conseguenza

$$x_{n+1} = x_1 + x_k = x_1 + kx_1 = (k+1)x_1 = \begin{cases} x_{k+1} & \text{se } k < n \\ (n+1)x_1 & \text{se } k = n. \end{cases}$$

Nel primo caso otteniamo $x_{n+1} = x_{k+1}$, che è falso dal momento che tutti i termini della successione sono diversi. Quindi siamo nel secondo caso e abbiamo provato proprio la formula (P_{n+1}). Quindi abbiamo dimostrato che per qualsiasi n da 1 a 2019 vale

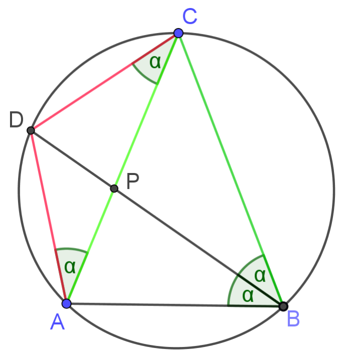
$$x_n = nx_1.$$

Dal momento che questa formula deve esser vera anche per $n = 7$ si trova

$$5 = x_7 = 7x_1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = \frac{5}{7}.$$

Di conseguenza $x_{2019} = 2019x_1 = 2019 \cdot \frac{5}{7} = \frac{10095}{7}$. La risposta è quindi 10095+7=10102.

Esercizio 17. Sia $\alpha = \widehat{ABD}$. Osserviamo che siccome BD è bisettrice di $\widehat{ABC}$ le corde AD e DC sono uguali perché sottese da due angoli entrambi uguali ad α. Inoltre anche $\widehat{DCA} = \widehat{DAC} = \alpha$ perché insistono su corde uguali.
Quindi i triangoli BDC e CDP sono simili perché hanno l'angolo $\widehat{CDP}$ in comune e un altro angolo uguale ad α. Quindi si ha



$$\frac{DC}{PD} = \frac{BD}{CD} \qquad \Longrightarrow \qquad BD = \frac{CD^2}{PD} = \frac{49}{5}. \tag{9}$$

Di conseguenza $PB = BD - PD = \frac{49}{5} - 5 = \frac{24}{5}$. E' facile vedere che anche i triangoli ADP e BCP sono simili, da cui deduciamo le seguenti due relazioni

$$\begin{aligned} \frac{AD}{BC} = \frac{PD}{PC} \qquad &\Longrightarrow \qquad PC = \frac{PD}{AD} \cdot BC = \frac{5}{7}BC \\ \frac{AD}{BC} = \frac{AP}{PB} \qquad &\Longrightarrow \qquad AP = \frac{AD \cdot PB}{BC} = \frac{7 \cdot \frac{24}{5}}{BC} = \frac{168}{5BC} \end{aligned} \tag{10}$$

Siccome ABC è isoscele, ricordando le (10) si ottiene

$$BC = AC = PC + PA = \frac{5}{7}BC + \frac{168}{5BC}$$

Abbiamo ottenuto quindi un'equazione in BC che si può riscrivere come

$$10BC^2 = 1176 \qquad \Longrightarrow \qquad BC = \sqrt{\frac{588}{5}} = \frac{14}{5}\sqrt{15}.$$

Per ricavare AB utilizziamo la similitudine tra i triangoli ABP e DCP:

$$\frac{AB}{BP}=\frac{CD}{PC} \qquad \Longrightarrow \qquad AB=\frac{BP\cdot CD}{PC}=\frac{\frac{24}{5}\cdot 7}{\frac{5}{7}BC}=\frac{24\cdot 49}{25\cdot\frac{14}{5}\sqrt{15}}=\frac{28}{25}\sqrt{15}.$$

Il perimetro di $ABCD$ è quindi $7+7+\frac{28}{25}\sqrt{15}+\frac{14}{5}\sqrt{15}=14+\frac{98}{25}\sqrt{15}$.

Esercizio 18. Svolgendo il prodotto si ha

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=(x_1+x_2+x_3)\,\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}.$$

Chiamiamo le tre quantità in gioco $P=x_1x_2x_2$, $S=x_1+x_2+x_3$ e $Q=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$. Per le relazioni tra le radici di un polinomio e i suoi coefficienti si ha che

$$S=-\frac{-12}{12}=1 \qquad Q=\frac{1}{12} \qquad P=\frac{-1}{12}.$$

La quantità richiesta è quindi data da $S\cdot\dfrac{Q}{P}=1\cdot\dfrac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{12}}=-1$.

Esercizio 19. Procedendo come nell'esercizio 10 si trova

$$\frac{5n+252}{n+13}=\frac{5(n+13)-65+252}{n+13}=5+\frac{187}{n+13}$$

$$\begin{aligned}\frac{7n^2+93n+48}{n+13}&=\frac{7n(n+13)-91n+93n+48}{n+13}=7n+\frac{2n+48}{n+13}\\&=7n+\frac{2(n+13)-26+48}{n+13}=7n+2+\frac{22}{n+13}.\end{aligned}$$

Quindi affinché la prima frazione sia intera occorre che $n+13$ sia un divisore di 187 ($=11\cdot 17$) , mentre invece per rendere intera la seconda serve che $n+13$ sia un divisore di 22. Poiché il massimo comun divisore tra 187 e 22 è 11, $n+13$ deve essere un divisore di 11, quindi può essere ±1 oppure ±11. Per ciascuno di questi quattro casi si trova un valore di n accettabile, quindi la risposta è 4.

Esercizio 20. Poiché ciascuno può stringere la mano a un numero di persone compreso tra 0 e 10 e i ragazzi sono 12, ci saranno almeno due ragazzi che hanno stretto la mano allo stesso numero di persone. Uno di questi due individui è proprio Alberto, perché sappiamo che tutti gli altri hanno stretto la mano a un numero diverso di persone.
Sia A_0 un ragazzo che non ha stretto la mano a nessuno e sia A_{10} uno che invece ha stretto la mano a 10 persone (quindi a tutti a parte sé stesso e il proprio compagno di squadra). Se A_{10} non fosse in squadra con A_0 dovrebbe stringergli la mano, ma invece A_0 non la stringe a nessuno! Quindi A_0 e A_{10} devono essere compagni di squadra. Consideriamo ora due tizi A_1 e A_9 che hanno stretto la mano a 1 e 9 persone rispettivamente. Siccome abbiamo detto che A_{10} ha stretto la mano a tutti quelli che non stanno in squadra con lui, deve averla stretta anche ad A_1. Quindi A_1 stringe la mano soltanto ad A_{10}. Adesso osserviamo che A_9 non può aver stretto la mano ad A_0 (perché A_0 non la stringe a nessuno!), quindi deve aver stretto la mano a tutti tranne

che ad A_0, al proprio compagno di squadra e a sé stesso, chiaramente. Se A_9 non fosse in squadra con A_1 dovrebbe stringergli la mano. Ma A_1 la stringe solo ad A_{10}! Quindi A_1 e A_9 sono compagni di squadra. Lo stesso discorso si può ripetere per dimostrare che le altre squadre sono $\{A_2, A_8\}, \{A_3, A_7\}, \{A_4, A_6\}, \{A_5, A_5\}$. Nell'ultima squadra ci sono due persone che hanno stretto lo stesso numero di mani, quindi deve trattarsi per forza della squadra in cui gioca Alberto. Quindi Alberto e Barbara hanno stretto entrambi 5 mani.

Esercizio 21. Dall'equazione data

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 0$$

si deduce che x deve essere un numero pari. Quindi possiamo scrivere $x = 2x_1$ e sostituendo nell'equazione sopra si trova

$$\begin{gathered} 8x_1^3 + 2y^3 + 4z^3 = 0 \\ \Downarrow \\ 4x_1^3 + y^3 + 2z^3 = 0 \end{gathered}$$

Da questa equazione si deduce che y deve essere un numero pari. Quindi possiamo scrivere $y = 2y_1$ e sostituendo si ha

$$\begin{gathered} 4x_1^3 + 8y_1^3 + 2z^3 = 0 \\ \Downarrow \\ 2x_1^3 + 4y_1^3 + z^3 = 0 \end{gathered}$$

Si scopre da questa che anche z deve essere pari, quindi $z = 2z_1$ e sostituendo si ha

$$\begin{gathered} 2x_1^3 + 4y_1^3 + 8z_1^3 = 0 \\ \Downarrow \\ x_1^3 + 2y_1^3 + 4z_1^3 = 0. \end{gathered}$$

Praticamente siamo tornati al punto di partenza! Allora potremmo ripetere lo stesso ragionamento per x_1, y_1, z_1 provando che anche essi sono numeri pari, e così via all'infinito. Vorrebbe dire che i numeri iniziali conterrebbero infiniti fattori 2. Questo chiaramente è impossibile, a meno che i tre numeri siano tutti uguali a zero. Infatti l'equazione ha solo la soluzione (0,0,0) e quindi la risposta è 1.

Esercizio 22. Sia a_n il numero di mosse necessarie a risolvere il gioco con n anelli. Immaginiamo che all'inizio tutti gli anelli siano impilati sulla prima asticella. Chiaramente $a_1 = 1$, dato che se è presente un solo anello è sufficiente postarlo su un'altra colonna per concludere il gioco. E' facile vedere che $a_2 = 3$: se ci sono due soli anelli, bisogna spostare prima quello piccolo ad esempio sulla seconda asticella, poi bisogna muovere l'anello grande sulla terza e infine portare anche quello piccolo sulla terza colonna. Per induzione dimostriamo che $a_n = 2^n - 1$. Il caso base $n = 1$ è verificato, visto che $a_1 = 2^1 - 1$. Cerchiamo di dimostrare che $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$, assumendo di sapere che $a_n = 2^n - 1$. Se abbiamo $n + 1$ anelli, al fine di riuscire a muoverli tutti su un'altra colonna, è necessario "liberare" l'anello più grosso (che è sul fondo) da tutti quelli presenti sopra di lui. Inoltre, una volta rimossi gli n anelli sopra, se vogliamo spostare l'$n+1$-esimo da un'altra parte, è necessario che ci sia un'altra colonna vuota (altrimenti saremmo costretti a piazzare l'anello più grosso sopra altri anelli più piccoli, che è vietato). Quindi per riuscire a spostare l'$n+1$-esimo anello è necessario muovere i primi n anelli dalla prima colonna ad un'altra, diciamo ad esempio sulla seconda. Per fare ciò, sappiamo per ipotesi induttiva che sono necessarie almeno $a_n = 2^n - 1$ mosse. Una volta spostati i primi n anelli sulla seconda colonna, possiamo finalmente muovere l'anello più grosso sulla terza colonna (quindi fin ora abbiamo fatto $2^n - 1 + 1 = 2^n$ mosse). Infine, bisogna rispostare i primi n anelli, che si trovano sulla seconda colonna, sopra l'anello più grosso e questo sappiamo che si fa in almeno $a_n = 2^n - 1$ mosse. Quindi, in totale, per spostare tutti gli anelli sulla terza colonna bisogna fare almeno $2^n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ mosse. Quindi abbiamo dimostrato per induzione che $a_n = 2^n - 1$ per ogni n, quindi la risposta è $a_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$.

Esercizio 23. Vediamo l'equazione "modulo 3", ovvero consideriamo i resti dei numeri presenti nella divisione per 3. Se p è uguale a 3 troviamo $8p^2 + 1 = 73$, che è un numero primo, quindi $p = 3$ è una soluzione. Se $p \neq 3$, siccome esso è un numero primo non sarà divisibile per 3, quindi p può dare resto 1 oppure 2 nella divisione per 3. Per la "nota generale" dell'Esercizio 15, il quadrato di p può dare resti $1^2 = 1$ oppure $2^2 = 4$. Quindi $8p^2 + 1$ può avere resto $8 \cdot 1 + 1 = 9$ oppure $8 \cdot 4 + 1 = 33$ nella divisione per 3. Quindi in ogni caso è un multiplo di 3. Siccome $8p^2 + 1$ deve essere primo, non può che essere uguale a 3. Ma l'equazione $8p^2 + 1 = 3$ chiaramente non ha alcuna soluzione intera. Quindi la sola soluzione è $p = 3$ e la risposta è 1.

Esercizio 24. Consideriamo il polinomio

$$Q(x) = P(x) - x^3. \tag{11}$$

Dalle ipotesi che abbiamo sappiamo che

$$Q(1) = P(1) - 1^3 = 1 - 1 = 0 \qquad Q(2) = P(2) - 2^3 = 0 \qquad Q(3) = P(3) - 3^3 = 0.$$

Quindi 1,2 e 3 sono radici di $Q(x)$. Pertanto, in virtù del teorema di Ruffini, il polinomio $Q(x)$ è divisibile per $x-1$, $x-2$ e $x-3$, ovvero esiste un polinomio $R(x)$ a coefficienti interi tale che

$$Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)R(x).$$

Ricordando la definizione (11) di $Q(x)$, abbiamo che

$$P(x) = Q(x) + x^3 = (x-1)(x-2)(x-3)R(x) + x^3.$$

Quindi $P(5) = (5-1)(5-2)(5-3)R(5) + 5^3 = 24R(5) + 125$.
Siccome deve essere $P(5) < 2019$, $R(5)$ sarà un intero inferiore a 79. Quindi al massimo si ha $P(5) = (5-1)(5-2)(5-3)78 + 5^3 = 1997$. Osserviamo che, ad esempio, il polinomio $P(x) = 78(x-1)(x-2)(x-3) + x^3$ rispetta tutte le ipotesi e $P(5) = 1997$. La risposta è quindi 1997.

Esercizio 25. Siccome il baricentro G divide la mediana AM in modo che $AM = 2GM$ si ha che l'area del triangolo ANM è il triplo di quella di GNM. Inoltre, siccome N è punto medio di AS si ha che l'area di NMS è uguale a quella di ANM. Quindi l'area del quadrilatero $GNSM$ è il quadruplo di quella di GNM. Osserviamo che siccome GM e GN sono raggi di una stessa circonferenza, il triangolo GNM è isoscele, quindi la sua area si può determinare dai dati del problema utilizzando la formula di Erone oppure il Teorema di Pitagora e vale 168 cm^2. La risposta è quindi $4 \cdot 168\ cm^2 = 672\ cm^2$.

Esercizio 26. Sia ℓ una radice intera del polinomio e sia α il resto di ℓ nella divisione per 12 (quindi, a meno di considerare equivalenti il resto 12 e il resto 0, possiamo supporre che α sia un intero compreso tra 1 e 12). Applicando svariate volte la nota generale dell'esercizio 15 (un polinomio è formato da tante somme e tanti prodotti) si ha che il resto del numero $p(\ell)$ nella divisione per 12 è uguale al resto di $p(\alpha)$ nella divisione per 12. Sappiamo però che per tutti i numeri k compresi tra 1 e 12, $p(k)$ non è multiplo di 12, quindi $p(\alpha)$ non può dare resto 0 nella divisione per 12. Tuttavia, siccome ℓ è radice del polinomio $p(\ell) = 0$, quindi chiaramente dà resto 0 nella divisione per 12, un assurdo. Quindi il polinomio non può avere radici intere e la risposta è 0.

Esercizio 27. Scriviamo per qualche intero A e B

$$2n + 1 = A^2 \qquad \text{e} \qquad 3n + 1 = B^2. \tag{12}$$

Dalla prima deduciamo che A è dispari, quindi esiste A_1 tale che $A = 2A_1 + 1$. Sostituendo si trova

$$2n + 1 = 4A_1^2 + 4A_1 + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad n = 2A_1(A_1 + 1).$$

Siccome uno tra A_1 e $A_1 + 1$ è sempre pari, deduciamo che n è multiplo di 4, quindi esiste n_1 tale che $n = 4n_1$. Sostituendo questa espressione nella seconda uguaglianza in (12) si trova

$$12n_1 + 1 = B^2.$$

Quindi anche B è dispari e pertanto si può scrivere nella forma $B = 2B_1 + 1$, da cui

$$12n_1 + 1 = 4B_1^2 + 4B_1 + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 3n_1 = B_1(B_1 + 1).$$

Siccome uno tra B_1 e $B_1 + 1$ è sempre pari, deduciamo che n_1 è pari, quindi n è multiplo di 8. Sommando le due uguaglianze in (12) si trova

$$5n + 2 = A^2 + B^2.$$

Guardando i resti dei termini nell'uguaglianza nella divisione per 5 si ha che, per la solita 'nota generale' nell'Esercizio 15, $A^2 + B^2$ deve dare resto 2 nella divisione per 5. Nella tabella sotto sono riportati tutti i possibili resti nella divisione per 5 di un quadrato perfetto.

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	4	1

Si vede facilmente che affinché $A^2 + B^2$ dia resto 2 è necessario che sia A^2 sia B^2 diano resto 1 nella divisione per 5. Riguardando le equazioni (12) alla luce di questa osservazione deduciamo ad esempio che $2n + 1$ dà resto 1 nella divisione per 5, quindi n è multiplo di 5. Abbiamo quindi dimostrato che n è multiplo di 40. Quindi è sufficiente vedere quali n, tra tutti i multipli di 40 inferiori a 300, soddisfano le richieste. Si vede che gli unici n che vanno bene sono 0 e 40, quindi la risposta è 2.

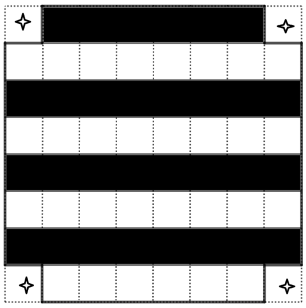
Esercizio 28. Si vede facilmente che per pavimentare la stanza senza dover tagliare le mattonelle occorre piazzarle con i lati paralleli a quelli della stanza e che il lato della stanza deve essere un numero intero ℓ (quindi possiamo immaginarla come una tabella con caselle di misura $1m \times 1m$). Se vogliamo coprire una stanza di lato ℓ (con le quattro caselle agli angoli rimosse) con n mattonelle, dal momento che ognuna di esse occupa una superficie di 4 caselle, deve essere

$$\ell^2 - 4 = 4n$$

da cui deduciamo che ℓ deve essere pari: $\ell = 2L$ per qualche intero L, da cui

$$L^2 - 1 = n \tag{13}$$

Supponiamo di colorare il pavimento della stanza a righe alternate bianche e nere, ciascuna delle quali larga 1 m.



Siccome n è pari, metà delle caselle saranno bianche e metà nere. Si può osservare che una volta piazzate le mattonelle esse possono essere di due tipi: o occupano tre caselle nere e una bianca oppure occupano una nera e tre bianche. Sia $\mathcal{A}$ il numero di mattonelle del primo tipo e $\mathcal{B}$ il numero di mattonelle del secondo tipo. Chiaramente si ha $n = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Le caselle colorate di nero sono in tutto

$$\text{nr nere} = 3\mathcal{A} + \mathcal{B}$$

mentre le bianche sono

$$\text{nr bianche} = \mathcal{A} + 3\mathcal{B}.$$

Siccome le caselle bianche sono tante quante le nere si ha che

$$3\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{A} + 3\mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A} = \mathcal{B}.$$

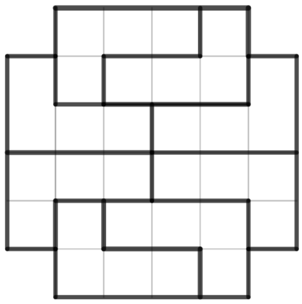
Di conseguenza $n = \mathcal{A} + \mathcal{B} = 2\mathcal{A}$ è un numero pari: $n = 2N$ per qualche intero N. Quindi, sostituendo nella (13) otteniamo

$$L^2 - 1 = 2N.$$

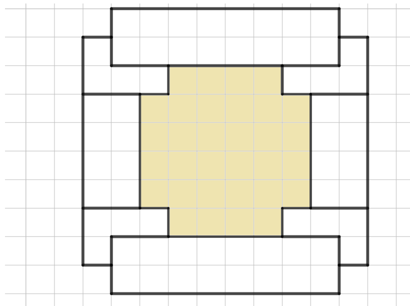
Quindi L è un numero dispari, ovvero esiste un certo k tale che $L = 2k + 1$, da cui

$$\ell = 2L = 2(2k + 1) = 4k + 2.$$

Abbiamo dimostrato quindi che per avere speranza di pavimentare la stanza, il lato ℓ deve essere un intero della forma $4k + 2$. Viceversa, per tutti gli interi di questa forma è possibile tassellare la stanza. Vediamo ad esempio una tassellazione per $\ell = 6$:

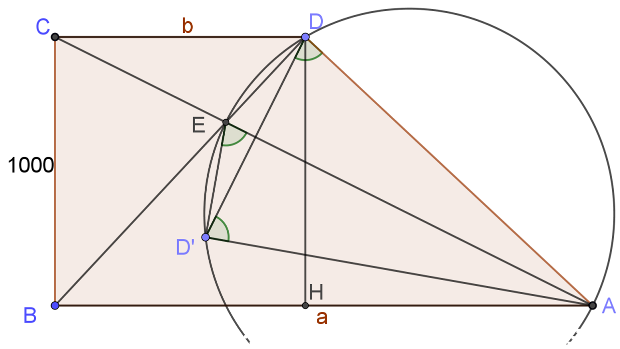


Inoltre, considerando che un rettangolo 2×4 è sempre tassellabile utilizzando due mattonelle, è possibile tassellare anche qualsiasi rettangolo del tipo $4k \times 2$. Si può allora dimostrare che una volta tassellata una stanza di lato $\ell = 4k+2$ si può anche tassellarne una di dimensione $\ell = 4(k+1)+2$ costruendo una "cornice" attorno alla precedente posizionando utilizzando quattro rettangoli e quattro singole mattonelle (negli angoli) come nella figura sotto



Grazie al principio di induzione si dimostra quindi che per ogni ℓ della forma $4k+2$ è possibile tassellare la stanza con le mattonelle in dotazione. Quindi dal momento che per i dati del problema deve essere $4 \leq \ell \leq 200$ possiamo scegliere il lato ℓ in $\left[\frac{200}{4}\right] - 1 = 49$ modi diversi.

Esercizio 29. Dal momento che il quadrilatero $AD'ED$ è inscrivibile in una circonferenza, gli angoli $\widehat{ADD'}$ e $\widehat{AED'}$ sono uguali, perché insistono sullo stesso arco AD'.



Tuttavia, siccome D e D' sono simmetrici rispetto ad AE, si ha che $DD' \perp AE$ e che $\widehat{ADD'} = \widehat{DD'A}$. Di conseguenza $\widehat{EAD'} = 90° - \widehat{DD'A} = 90° - \widehat{ADD'} = 90° - \widehat{AED'}$. Quindi $\widehat{ED'A} = \widehat{EDA} = 90°$ e AE è diametro della circonferenza. Detta H la proiezione di D su AB, applicando il Teorema di Pitagora al triangolo ADH si ha che

$$AD^2 = 1000^2 + (a-b)^2.$$

L'area del triangolo ABD è data da

$$\mathcal{A}(ABD) = \frac{AD \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{1000^2 + (a-b)^2} \cdot \sqrt{b^2 + 1000^2}}{2}.$$

Tuttavia l'area di ABD è anche uguale a $\frac{a \cdot 1000}{2}$, quindi

$$\frac{a \cdot 1000}{2} = \frac{\sqrt{1000^2 + (a-b)^2} \cdot \sqrt{b^2 + 1000^2}}{2}$$

Elevando tutto al quadrato e svolgendo i calcoli si trova

$$\begin{gathered} b^4 + a^2b^2 + 1000^4 + 2 \cdot 1000^2 b^2 - 2ab^3 - 2 \cdot 1000^2 ab = 0 \\ \Downarrow \\ (b^2 - ab + 1000^2)^2 = 0 \\ \Downarrow \\ b^2 - ab + 1000^2 = 0. \end{gathered}$$

Vedendo l'ultima uguaglianza come un'equazione di secondi grado in b, essa ammette un'unica soluzione se e solo se il discriminane è nullo:

$$0 = \Delta = a^2 - 4 \cdot 1000^2 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 2000.$$

Possiamo dunque ricavare che $b = 1000$ e di conseguenza la risposta è $a + b = 3000$.

Esercizio 30. Proviamo a calcolare quanto vale f nei primi interi

- ponendo $m = n = 1$ si ha

$$0 = f(2) = f(1+1) = \begin{cases} f(1) + f(1) = 2f(1) & \Rightarrow f(1) = 0 \\ \quad \text{oppure} \\ f(1) + f(1) + 1 = 2f(1) + 1 & \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

  Il secondo caso chiaramente non può verificarsi, dal momento che f restituisce sempre interi maggiori o uguali a 0. Quindi deve essere $\boxed{f(1) = 0}$.

- Ponendo $m = 1, n = 2$ si trova

$$f(3) = f(1+2) = \begin{cases} f(1) + f(2) = 0 \ \text{ assurdo perché } f(3) \neq 0, \\ \quad \text{oppure} \\ f(1) + f(2) + 1 = 1 \quad \Rightarrow f(3) = 1. \end{cases}$$

  Quindi abbiamo trovato che $\boxed{f(3) = 1}$.

- Ponendo $m = 2, n = 2$ si trova

$$f(4) = f(2+2) = \begin{cases} f(2) + f(2) = 0 \\ \quad \text{oppure} \\ f(2) + f(2) + 1 = 1. \end{cases}$$

Tuttavia possiamo ottenere 4 anche come $1+3$, quindi ponendo $m=1, n=3$ si trova

$$f(4)=f(1+3)=\begin{cases} f(1)+f(3)=1 \\ \quad\text{oppure} \\ f(1)+f(3)+1=2. \end{cases}$$

Mettendo assieme le due informazioni, deduciamo che deve essere $\boxed{f(4)=1}$.

- Ponendo $m=2, n=3$ si trova

$$f(5)=f(2+3)=\begin{cases} f(2)+f(3)=1 \\ \quad\text{oppure} \\ f(2)+f(3)+1=2. \end{cases}$$

Tuttavia possiamo ottenere 5 anche come $1+4$, quindi ponendo $m=1, n=4$ si trova

$$f(5)=f(1+4)=\begin{cases} f(1)+f(4)=1 \\ \quad\text{oppure} \\ f(1)+f(4)+1=2. \end{cases}$$

In questo caso, non riusciamo da queste informazioni a decidere se $f(5)$ valga 1 oppure 2 $\boxed{:(}$.

- Ponendo $m=3, n=3$ si trova

$$f(6)=f(3+3)=\begin{cases} f(3)+f(3)=2 \\ \quad\text{oppure} \\ f(3)+f(3)+1=3. \end{cases}$$

Tuttavia possiamo ottenere 6 anche come $2+4$, quindi ponendo $m=2, n=4$ si trova

$$f(6)=f(2+4)=\begin{cases} f(2)+f(4)=1 \\ \quad\text{oppure} \\ f(2)+f(4)+1=2. \end{cases}$$

Da cui deduciamo che $\boxed{f(6)=2}$.

Al momento abbiamo visto che $f(3)=1, f(6)=2$ e sappiamo che $f(9999)=3333$. Che sia per caso $f(3k)=k$ per ogni k?

Cosa possiamo dire di $f(3k)$? Ponendo $m = k$ e $n = 2k$ si ha

$$(*) \quad f(3k) = \begin{cases} f(k) + f(2k) = f(k) + \begin{cases} f(k) + f(k) = 2f(k) \Rightarrow f(3k) = 3f(k) \\ \quad \text{oppure} \\ f(k) + f(k) + 1 = 2f(k) + 1 \Rightarrow f(3k) = 3f(k) + 1 \end{cases} \\ \quad \text{oppure} \\ f(k) + f(2k) + 1 = 1 + f(k) + \begin{cases} f(k) + f(k) = 2f(k) \Rightarrow f(3k) = 1 + 3f(k) \\ \quad \text{oppure} \\ f(k) + f(k) + 1 = 2f(k) + 1 \Rightarrow f(3k) = 2 + 3f(k) \end{cases} \\ . \end{cases}$$

Quindi ci sono tre possibilità: $f(3k)$ può essere un numero intero compreso tra $3f(k)$ e $3f(k) + 2$. Possiamo inoltre dimostrare per induzione su k che $f(3k) \geq k$ per ogni k. Per $k = 1$ è vero, dal momento che $f(3) = 1 \geq 1$. Anche per $k = 2$ abbiamo visto che è vero, dato che $f(6) = 2$. Proviamo a dimostrare che $f(3(k+1)) \geq k+1$ sapendo che $f(3k) \geq k$:

$$f(3(k+1)) = f(3k+3) = \begin{cases} f(3k) + f(3) \geq k+1 \\ \quad \text{oppure} \\ f(3k) + f(3) + 1 \geq k+2. \end{cases}$$

Quindi in ognuno dei due casi si ha $f(3(k+1)) \geq k+1$, quindi abbiamo provato che per ogni k

$$\boxed{f(3k) \geq k}.$$

Visto che fin'ora siamo portati a pensare che in realtà $f(3k)$ sia proprio k, supponiamo che per un certo k_0 si abbia $f(3k_0) > k_0$ e vediamo che succede. Per ogni $h \geq 0$ si avrebbe

$$f(3(k_0+h)) = f(3k_0+3h) \begin{cases} f(3k_0) + f(3h) > k_0 + h \qquad \text{oppure} \\ f(3k_0) + f(3h) + 1 > k_0 + h + 1 \end{cases}.$$

Quindi sarebbe anche $f(3k) > k$ per ogni $k \geq k_0$. Dunque se ad un certo punto $f(3k_0)$ supera k_0, questo accadrà anche per tutti i successivi mutipli di 3. Dal momento che sappiamo che $f(9999) = 3333$, questo k_0, se esiste, deve essere più grande di 3333. Quindi abbiamo provato che

$$\boxed{f(3k) = k \qquad \forall\ k = 1, \ldots, 3333.}$$

Il problema ci chiede di calcolare $f(1982)$ che, sfortunatamente, non è multiplo di 3, quindi non possiamo ancora dire quanto vale. Tuttavia, lo schema $(*)$ ci fornisce qualche informazione su come è legato $f(k)$ ad $f(3k)$. Infatti, leggendolo 'al contrario' troviamo che per ogni $k \leq 3333$

$$f(k) = \begin{cases} \dfrac{f(3k)}{3} = \dfrac{k}{3} \\ \\ \text{oppure} \\ \\ \dfrac{f(3k)-1}{3} = \dfrac{k-1}{3} \\ \\ \text{oppure} \\ \\ \dfrac{f(3k)-2}{3} = \dfrac{k-2}{3} \end{cases} \quad .$$

Osserviamo che preso un qualunque $k \leq 3333$ riusciamo a decidere in quale dei tre casi ci troviamo, perchè $f(k)$ deve essere intero, e solo una di quelle tre frazioni può essere intera. Ad esempio per $k = 1982$, si ha che dal momento che 1982 dà resto 2 nella divisione per 3, dobbiamo essere nel terzo caso, quindi

$$f(1982) = \frac{1982-2}{3} = 660.$$