Esercizi

Gorizia, 24 Gennaio 2019

Esercizio 1. A Silvia piacciono solo i multipli di 5 e i multipli di 8. Quanto vale la somma di tutti i numeri da lei graditi che sono inferiori a 1000?

Esercizio 2. In una classe ogni ragazzo è amico di esattamente due ragazze e ogni ragazza è amica di esattamente 3 ragazzi. Quanti studenti ci sono in classe, sapendo che non sono più di 38 e che all'ultimo compito di matematica 31 di loro hanno preso un'insufficienza?

Esercizio 3. La password del computer di Giovanni è un codice alfanumerico composto da 11 numeri e dalle lettere che compongono la parola MAMMA. Sapendo che tutte le cifre vengono utilizzate e che due cifre uguali non possono essere mai vicine qual è la probabilità di indovinare la password?

Esercizio 4. Quanti sono i cubi perfetti compresi tra 14 e 2^{2019} le cui ultime due cifre possono essere 2 o 6?

Esercizio 5. Chef Antonio ha preparato un dessert molto particolare. Esso è composto da un cubo di marzapane di lato 5 cm e su ogni faccia del cubo ha posizionato una piramide retta di cioccolato avente come base la faccia del cubo e avente altezza pari alla metà del lato del cubo. Il dolce verrà servito adagiato su una delle sue facce su un piatto rotondo. Quanto deve misurare almeno il diametro del piatto?

Esercizio 6. Determinare quante coppie di numeri (m, n) di due cifre sono tali che il loro prodotto mn è uguale al numero che si ottiene moltiplicando fra loro i due numeri di due cifre ottenuti dai precedenti scambiando fra loro la prima cifra di m e la prima cifra di n.

Esercizio 7. Sia Γ una circonferenza di diametro $AB = 7$ e sia C un punto su tale circonferenza. Sia D l'intersezione tra la retta AC e la retta tangente a Γ in B e sia E l'intersezione tra BD e la retta tangente a Γ in C. Sapendo che $ED = 3$ determinare l'area del triangolo ABD.

Esercizio 8. Per costruire un buon talismano per vincere le gare di matematica occorre innanzitutto procurarsi un anello di legno, 37 chiodini, un martello, svariati metri di lana e una grande confezione di gomme da masticare. Si procede fissando i 37 chiodini sull'anello quasi a casaccio e poi si congiunge ogni coppia di chiodini con un pezzetto di lana. L'unica cosa a cui bisogna prestare attenzione è che non ci siano mai tre fili di lana che si intersecano in uno stesso punto (se avete piantato male i chiodi e si presenta questo fenomeno potrebbe trattarsi di un cattivo presagio). Infine occorre masticare una gomma per ogni punto di intersezione tra due fili di lana che avvenga all'interno dell'anello (non sull'anello stesso) e appiccicarla sul punto di intersezione. In questo modo il vostro talismano sarà solido come una roccia e vi proteggerà contro i problemi più difficili. Quante gomme occorre masticare?

Esercizio 9. Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la somma dei quadrati delle radici del polinomio $x^2 - (a-2)x - a - 1$ ha valore minimo?

Esercizio 10. Quanti sono gli interi n tali che $2n + 3$ è un divisore di $4n + 2025$?

Esercizio 11. All'istituto "T.Bayes" la media delle età delle studentesse è di 17 anni e mezzo e quella degli studenti è di 16. Sapendo che l'età media totale è di 17 anni, qual è la percentuale di ragazze che frequentano l'istituto?

Esercizio 12 (GaS nazionale 2018)**.** Quante cifre ha il numero $1 + (1 + 2) + \cdots + (1 + 2 + \cdots + 1918)$?

Esercizio 13. Con quanti zeri termina 2019!?

Esercizio 14. Alla festa di capodanno hanno partecipato 2019 persone. Il gruppo aveva una proprietà interessante: prese qualsiasi quattro persone ve ne era sempre una di esse che conosceva le altre tre. Quante erano almeno le persone che conoscevano tutti gli altri presenti alla festa?

Esercizio 15. Quante sono le coppie di interi (a, b) tali che $5a^2 - 11b^2 = 2$?

Esercizio 16. Consideriamo una sequenza di numeri reali positivi $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2019}$ disposti in ordine crescente tale che presi due qualsiasi termini della sequenza x_n e x_m con $m > n$, esiste un altro termine della sequenza x_k (eventualmente uguale a qualcuno tra x_m e x_n) tale che $x_m = x_n + x_k$. Sapendo che $x_7 = 5$ determinare x_{2019}. Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini (sì, il risultato è un numero razionale).

Esercizio 17. Sia ABC un triangolo isoscele con $AC = CB$, e sia Γ la circonferenza circoscritta ad ABC. La bisettrice dell'angolo in B inteseca Γ in un punto D tale che $AD = 7$. Detto P il punto di intersezione tra AC e BD è noto che $PD = 5$. Determiare il perimetro del quadrilatero $ABCD$.

Esercizio 18. Siano x_1, x_2, x_3 le tre radici reali del polinomio $12x^3-12x^2+x+1$. Calcolare $(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})$.

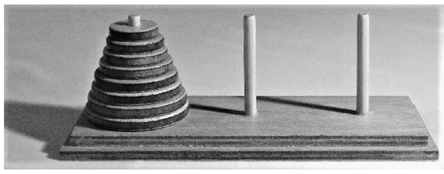
Esercizio 19. Determinare quanti sono gli interi n tali che i seguenti due numeri siano entrambi interi

$$\frac{5n + 252}{n + 13} \qquad \frac{7n^2 + 93n + 48}{n + 13}.$$

Esercizio 20. Ad un torneo di beach volley partecipano sei squadre: i rossi, gli arancioni, i gialli, i verdi, i blu e i viola. Prima di cominciare le partite si organizza una festa per poter fare amicizia. In un primo momento tutti i partecipanti che non si conoscono già fra loro si stringono la mano. Al termine di questo giro di strette di mano Alberto, che fa parte della squadra viola, chiede a ciascuno degli altri presenti quante mani ha stretto e si stupisce del fatto che ciascuno gli dà una risposta diversa. Considerando che una squadra di beach volley è formata da due persone e che chiaramente due compagni di squadra si conoscono sempre fra loro, determinare quante mani ha stretto Barbara, la compagna di squadra di Alberto.

Esercizio 21. Quate sono le terne ordinate (x, y, z) di numeri interi tali che $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 0$?

Esercizio 22. Il gioco della "Torre di Hanoi" consiste in tre asticelle verticali e 10 anelli di dimensioni crescenti che vanno spostati da un paletto all'altro. L'unica regola da rispettare è quella di non posizionare mai un anello più grande sopra uno più piccolo.



All'inizio del gioco tutti i 10 anelli si trovano sulla prima colonna, disposti dal più grande al più piccolo (partendo dal fondo). Quante mosse sono necessarie, come minimo, per spostare tutti gli anelli sulla seconda colonna?

Esercizio 23. Quanti sono i numeri primi p tali che $8p^2 + 1$ è ancora un numero primo? Dare come risposta 0000 se sono infiniti, atrimenti le ultime quattro cifre.

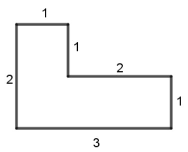
Esercizio 24. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $P(1) = 1$, $P(2) = 8$, $P(3) = 27$, $P(5) < 2019$. Qual è il massimo valore che può assumere $P(5)$?

Esercizio 25 (Cesenatico 2018)**.** Sia ABC un triangolo e sia G il suo baricentro, ovvero il punto di intersezione delle mediane. Detto M il punto medio di BC, la circonferenza centrata in G e avente raggio $GM = 25$ cm interseca il lato BC nel punto N. Sia S il simmetrico di A rispetto ad N. Sapendo che $NM = 14$ cm calcolare l'area del quadrilatero $NGMS$.

Esercizio 26. Matilda ha per le mani un polinomio $p(x)$ di grado 2019 a coefficienti interi. Non sa bene che farci, allora prova a sostituire al posto della x i numeri $1, 2, \ldots, 12$ trovando 12 numeri interi, nessuno dei quali divisibile per 12. Quante radici intere può avere, al massimo, il polinomio ?

Esercizio 27. Determinare quanti sono gli interi n più piccoli di 300 tali che sia $2n + 1$ sia $3n + 1$ sono quadrati perfetti.

Esercizio 28. Il baron Algebraldi possiede un modesto appezzamento di terreno quadrato di lato 200 metri. Vuole far costruire su di esso una casa quadrata, ma non è molto interessato alle dimensioni che la casa debba avere. L'unica cosa che gli importa è che su ciascuno dei quattro angoli della casa possa piazzare un piedistallo avente base quadrata di lato 1 m su cui poter disporre le statue dei propri avi e che rimanga lo spazio per una scrivania quadrata di lato 2 m. Ha inoltre disposto che, dopo aver piazzato i quattro piedistalli, la parte rimanente della casa dovrà essere pavimentata con dei mattoni di marmo a forma di L come quello rappresentato in figura (le dimensioni della mattonella sono espresse in metri in figura).



Chiaramente non tollererebbe mai che queste pregiate mattonelle venissero tagliate o sovrapposte tra loro. In quanti modi può scegliere la misura del lato della casa, in modo da poter soddisfare queste richieste?

Esercizio 29 (Gas Nazionale 2018)**.** La scimmia Goentel, diventata intelligentissima grazie al cappello inventato dal prof. Fredholm, si diletta di problemi di geometria. Nell'aula magna dell'università di Marte, pondera di fronte a un trapezio $ABCD$, rettangolo in B, con base maggiore AB e base minore DC. Ha indicato le lunghezze di alcuni suoi lati: $AB = a$, $BC = 1000$, $DC = b$. Chiama poi D' il simmetrico di D rispetto alla retta AC, ed E l'intersezione di AC e BD. Goentel sa che esiste un valore di a tale per cui $AD'ED$ è inscrivibile in una circonferenza per uno e un solo valore positivo di b. Sapreste aiutarla a scoprire quanto vale $a + b$?

Esercizio 30 (IMO 1982)**.** Sia $f : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}$ una funzione tale che per ogni coppia di interi positivi m e n il numero

$$f(m + n) - f(m) - f(n)$$

sia uguale a 1 oppure a 0. Sapendo che $f(2) = 0$, $f(3) \neq 0$, $f(9999) = 3333$ determinare il valore di $f(1982)$.