Soluzioni

Trieste, 23 Gennaio 2019

Esercizio 1. Se indichiamo con S la somma cercata, essa può essere calcolata come la somma S_1 dei numeri naturali da 1 a 2019 a cui occorre sottrarre la somma S_3 dei multipli di 3 da 1 a 2019 e la somma S_5 dei multipli di 5 da 1 a 2019. In tal modo, però, dal totale sono stati sottratti due volte i numeri che sono sia multipli di 3 che di 5, per cui al risultato precedente occorre sommare S_{15}, cioè la somma dei multipli di 15 da 1 a 2019. In formule:

$$S = S_1 - S_3 - S_5 + S_{15}.$$

La somma dei numeri da 1 a n si calcola con la nota formula $n(n+1)/2$, da cui

$$S_1 = \frac{2019 \cdot 2020}{2} = 2039190.$$

Per calcolare S_3, si può considerare il fatto che $2019 = 3 \cdot 673$, quindi

$$S_3 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + \cdots + 673 \cdot 3 = 3(1 + 2 + \cdots + 673) = \frac{3 \cdot 673 \cdot 674}{2} = 680403.$$

Allo stesso modo si può calcolare S_5 (tenendo conto che il maggiore multiplo di 5 inferiore a 2019 è 2015):

$$S_5 = 5(1 + \cdots + 403) = \frac{5 \cdot 403 \cdot 404}{2} = 407030.$$

Infine $S_{15} = 15(1 + \cdots + 134) = \frac{15 \cdot 134 \cdot 135}{2} = 135675$. Quindi per completare l'esercizio basta calcolare

$$S = 2039190 - 680403 - 407030 + 135675 = 1087432.$$

Esercizio 2. Osserviamo innanzitutto che

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}. \tag{1}$$

È noto che, in un polinomio di secondo grado, il rapporto tra il coefficiente del termine di primo grado e quello del termine di secondo grado è pari all'opposto della somma delle radici, quindi

$$\frac{8b - 13}{a} = -(\alpha + \beta). \tag{2}$$

Mentre il rapporto tra il termine noto e il coefficiente del termine di secondo grado è pari al prodotto delle radici:

$$\frac{2b + 1}{a} = \alpha\beta. \tag{3}$$

Sostituendo le espressioni (2) e (3) trovate per somma e prodotto nella (1) si ha

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{-\frac{8b-13}{a}}{\frac{2b+1}{a}} = -\frac{8b - 13}{2b + 1} = -\frac{4(2b + 1) - 17}{2b + 1} = -4 + \frac{17}{2b + 1}.$$

Affinché questo numero sia un intero, $2b + 1$ deve essere un divisore di 17, quindi b può valere al massimo 8.

Esercizio 3. La risposta è 0 e si può capire ragionando per casi.

- Un quadrato n^2 termina con la cifra 5 se e solo se n termina con 5. Sia a la cifra delle decine di n. Quindi possiamo scrivere $n = 100m + 10a + 5$. Quindi

$$n^2 = 100k + 5 \cdot 10a + 5 \cdot 10a + 25 = 100k + 100a + 25 \tag{4}$$

  da cui si vede che tutti i quadrati di numeri che terminano con 5 terminano con 25.

- Un quadrato n^2 termina con la cifra 4 se e solo se n termina con 2 o con 8. Consideriamo il caso 8 (l'altro è analogo). Sia a la cifra delle decine di n. Quindi possiamo scrivere $n = 100m + 10a + 2$. Quindi

$$n^2 = 100k + 8 \cdot 10a + 8 \cdot 10a + 64 = 100k + 160a + 64 \tag{5}$$

  da cui si vede che la cifra delle decine di n^2 è pari.

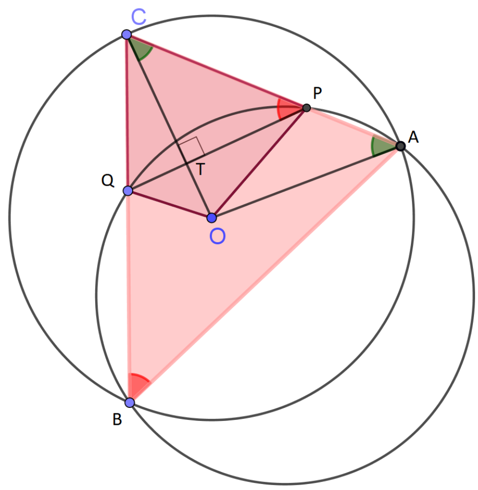
Esercizio 4. Ci possono essere 5 possibilità:

- Pareggiano tutti (conoscono tutti lo stesso numero di primi) (**1** solo caso).
- Solo 3 pareggiano. Può accadere o che ci sia un primo classificato e tre secondi oppure, viceversa, 3 primi classificati e un secondo. Per ciscuno di questi due casi ci sono 4 possibili piazzamenti, infatti basta scegliere chi sia quello che arriva "da solo". In totale dunque ci sono **8** possibili classifiche con questa caratteristica.
- Pareggiano a coppie di due, quindi ci sono due primi e due secondi. Per capire quante classifiche di questo tipo ci sono basta contare in quanti modi posso scegliere, ad esempio, i due ragazzi che arrivano primi, quindi $\binom{4}{2} = \mathbf{6}$.
- Solo due pareggiano. I due pareggianti possono classificarsi primi, secondi o terzi. Per ciascuno di questi tre casi ci sono 12 possibili classifiche. Infatti, basta contare in quanti modi posso scegliere i due che non pareggiano: il primo posso sceglierlo in 4 modi e il secondo in 3 (attenzione che conta l'ordine in cui li sto scegliendo, dal momento che loro non pareggiano), quindi in 12 modi. In totale ci saranno quindi $3 \cdot 12 = \mathbf{36}$ possibili classifiche di questo tipo.
- Nessun pareggio. Ho **24** possibilità, dato che il primo classificato può essere scelto in 4 modi, il terzo in 3, il secondo in 2 e l'ultimo sarà quello rimasto dalle precedenti scelte.

In totale ci saranno quindi 1+8+6+36+24=75 classifiche.

Esercizio 5. Siccome $ABQP$ è inscritto in una circonferenza, gli angoli opposto sono supplementari, quindi

$$\widehat{ABC} = 180° - \widehat{APQ} = \widehat{CPQ}.$$



Siccome OA e OC sono raggi di una stessa circonferenza, il triangolo AOC è isoscele e

$$\widehat{CAO} = \widehat{OCA} = \frac{180° - \widehat{AOC}}{2} = 90° - \frac{\widehat{AOC}}{2}.$$

Siccome $\widehat{AOC}$ è angolo al centro corrispondente all'angolo alla circonferenza $\widehat{ABC}$ si ha che $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC}$, quindi

$$\widehat{OCA} = 90° - \frac{\widehat{AOC}}{2} = 90° - \widehat{ABC} = 90° - \widehat{CPQ}.$$

Quindi PQ e OC sono perpendicolari.

L'area del quadrilatero $OPCQ$ è quindi il prodotto delle diagonali, poiché se $T = PQ \cup OC$ si ha che

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(OPCQ) = \mathcal{A}(OPQ) + \mathcal{A}(PCQ) &= \frac{PQ \cdot OT}{2} + \frac{PQ \cdot CT}{2} \\ &= \frac{PQ \cdot (OT + CT)}{2} = \frac{PQ \cdot OC}{2} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14.\end{aligned}$$

Esercizio 6. La risposta è 2. $6n+2027 = 2(3n+4)+2019$. Quindi $3n+4$ divide $6n+2027$ se e solo se $3n + 4$ è un divisore di 2019. La scomposizione in primi di 2019 è $3 \cdot 673$. Ciò implica che i divisori (sia positivi che negativi) di 2019 sono $\pm1, \pm3, \pm673, \pm2019$. Ognuno di questi può essere pari a $3n + 4$ se e solo se, nella divisione per 3, dà resto $+1$. Di questi, solo $+1$ e $+673$ soddisfano questa condizione.

Esercizio 7. Scriviamo n come $n = 100a + 10b + c$ con $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ e $b, c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Le ipotesi del problema si possono scrivere come

$$\begin{aligned}&100a + 10b + c - a - b - c = 234 \\ &\qquad \Longrightarrow \quad 99a + 9b = 234 \quad \Longrightarrow \quad 11a + b = 26.\end{aligned}$$

E' facile vedere che gli unici a e b per cui l'ultima uguaglianza è valida sono $a = 2$ e $b = 4$. Quindi il numero n, in notazione decimale, si scrive come $24c$, dove c è un qualunque numero tra 0 e 9. Quindi ci sono 10 diversi numeri che rispettano le richieste.

Esercizio 8. Il numero di zeri con cui termina 2019! è pari alla massima potenza di 10 che lo divide. Questa si ottiene calcolando quali sono le potenze di 2 e di 5 che compaiono nella scomposizione in fattori primi di 2019!; la potenza di 10 cercata ha esponente pari al minimo tra gli esponenti di 2 e di 5. Tra i due, l'esponente minore è quello relativo al 5 (perché?), quindi occorre calcolare quest'ultimo.

Poiché 2019! è il prodotto dei naturali da 1 a 2019, per calcolare qual è la massima potenza di 5 che lo divide, occorre solo considerare qual è la massima potenza di 5 che divide il prodotto di tutti i multipli di 5 compresi tra 1 e 2019. L'esponente cercato è quindi la somma degli esponenti di 5 nella scomposizione in primi di questi multipli di 5. Questa somma si può calcolare nel seguente modo:

- Ci sono 403 multipli di 5 compresi tra 1 e 2019. Non considerando, per il momento, che tra questi ci sono anche multipli di potenze di 5 maggiori, questi 403 multipli danno un contributo pari a 403 all'esponente di 5 in 2019!.

- Occorre poi considerare i multipli di 5^2 Il numero di multipli di 25 minori o uguali a 2019 è 80. Questi danno un ulteriore contributo alla somma che stiamo calcolando pari ad 80 (in quanto, per ognuno di essi, uno dei fattori 5 è già stato contato al passo precedente).

- I multipli di 5^3 minori o uguali a 2019 è 16. Ognuno di essi dà un ulteriore contributo al totale pari a 16, in quanto, per ognuno di essi, due dei fattori 5 sono stati conteggiati nei passi precedenti.

- Ci sono 3 multipli di 5^4 minori o uguali a 2019. Ognuno di questi dà un ulteriore contributo alla somma pari a 3.

La massima potenza di 5 che divide 2019! ha esponente quindi pari a $403+80+16+3 = 502$.

Esercizio 9. L'unica coppia (p, q) che soddisfa l'equazione è $(3, 2)$. Infatti, dall'equazione risulta facilmente che p deve essere dispari, cioè $p = 4k + 1$ oppure $p = 4k + 3$. Se $p = 4k + 1$ si ha

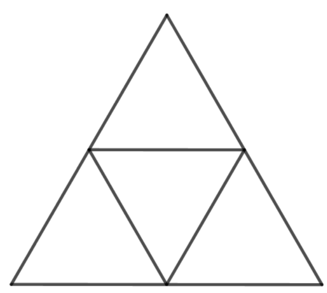
$$p^2 = 16k^2 + 8k + 1. \tag{6}$$

Se $p = 4k + 3$ abbiamo

$$p^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1. \tag{7}$$

In entrambi i casi il risultato dà resto 1 nella divisione per 4. Se anche q fosse dispari, per lo stesso ragionamento $p^2 - 2q^2$ darebbe resto 3 nella divisione per 4, contro il fatto che $p^2 - 2q^2 = 1$. Da ciò segue che q è pari, cioè $q = 2$ e quindi l'unica possibilità è $p = 3$.

Esercizio 10. Immaginiamo di suddividere il bersaglio in 4 zone come in figura (le linee tracciate congiungono i punti medi dei lati). Poiché sul bersaglio si infilzano 5 freccette e le zone considerate sono 4, ci sarà almeno una zona che conterrà almeno due freccette (possono trovarsi anche sui bordi).



Se due freccette sono nello stesso triangolino la loro distanza al più può essere pari al lato del triangolino (che misura 20 cm). Quindi sul bersaglio ci sono almeno due freccette a distanza minore o uguale a 20 cm. Inoltre è possibile realizzare una situazione in cui effettivamente ci sono coppie di frecce a 20 cm di distanza, semplicemente piazzandole su alcuni dei vertici dei triangolini. La risposta è quindi 20 cm.

Esercizio 11. Consideriamo il polinomio $Q(x) = (x+3)P(x) - 2x - 1$. Sappiamo per ipotesi che per ogni $n = 0, \ldots, 2018$

$$Q(n) = (n+3)P(n) - 2n - 1 = (n+3)\frac{2n+1}{n+3} - 2n - 1 = 0.$$

Quindi i numeri $0, 1, 2, \ldots, 2018$ sono radici di $Q(x)$. In virtù del Teorema di Ruffini, il polinomio $Q(x)$ sarà dunque divisibile per x, $x-1$, $\ldots$, $x-2018$, ovvero esiste un certo polinomio $R(x)$ tale che

$$Q(x) = x(x-1)(x-2)\cdot \cdots \cdot (x-2018)R(x). \tag{8}$$

Siccome $P(x)$ ha grado 2018, $Q(x)$ avrà grado 2019 (perché?). Visto che nell'espressione (8) compare già il prodotto di 2019 termini, $R(x)$ non può che avere grado 0, ovvero è una costante c. Quindi $Q(x) = c \cdot x(x-1)(x-2) \cdot \cdots \cdot (x-2018)$ e dunque

$$(x+3)P(x) = 2x + 1 + Q(x) = 2x + 1 + c \cdot x(x-1)(x-2)\cdot \cdots \cdot (x-2018). \tag{9}$$

Ponendo $x = -3$ nell'uguaglianza sopra possiamo scoprire quale è la costante c:

$$0 = 2(-3) + 1 + c \cdot (-3)(-4)(-5) \cdot \cdots \cdot (-2021) \qquad \Rightarrow \qquad 5 = c \cdot \frac{-2021!}{2}.$$

Quindi si ha che $c = -\frac{10}{2021!}$; sostituendo questo valore nella (9) si ha

$$(x+3)P(x) = 2x + 1 - \frac{10}{2021!} \cdot x(x-1)(x-2) \cdot \cdots \cdot (x-2018).$$

Ponendo $x = 2019$ abbiamo

$$2022 \cdot P(2019) = 2 \cdot 2019 + 1 - \frac{10}{2021!} \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

$$\Downarrow$$

$$P(2019) = \frac{1}{2022}\left(4039 - \frac{10 \cdot 2019!}{2021!}\right) = \frac{1}{2022}\left(4039 - \frac{10}{2020 \cdot 2021}\right).$$

Quindi la risposta è una frazione orrenda.

Esercizio 12. La risposta è 9. Si consideri una colorazione delle caselle che rispetti le condizioni del problema. Possiamo costruire un grafo nel seguente modo: si disegnino 10 punti, ognuno rappresentante un colore, e se ne colleghi una coppia con un segmento se questa è una coppia buona.

Poiché da ognuna delle caselle della scacchiera se ne può raggiungere ogni altra con un percorso che passa, di volta in volta, in una casella adiacente, se ne deduce che il grafo costruito deve essere *connesso*: cioè deve essere possibile, partendo da uno qualsiasi dei 10 punti rappresentanti i colori, raggiungerne ogni altro percorrendo i segmenti disegnati, cioè spostandosi tra coppie buone di punti.

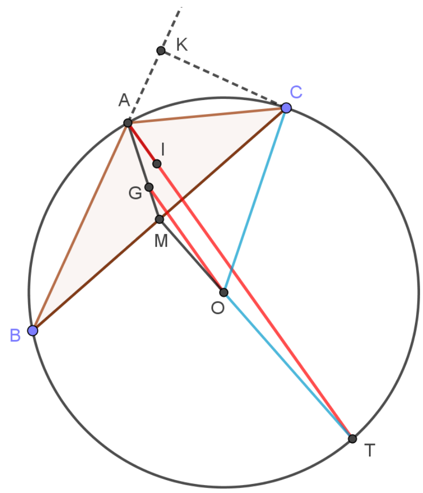
Dimostriamo che un siffatto grafo è contiene almeno 9 segmenti (che in genere sono chiamti *lati)* distinti. Poiché il grafo è connesso, deve esistere un percorso tra i lati che passa almeno una volta per ogni punto (detto in genere *vertice*). Infatti basta numerare i vertici e unire il percorso che porta dal vertice 1 al 2 con quello che porta dal 2 al 3... Immaginiamo di partire da un vertice e fare il percorso suddetto: ogni volta che si raggiungera' un vertice per cui non si era passati prima, ci si sarà arrivati passando per un lato su cui non si era mai passati (in quanto, se il lato fosse già stato percorso, anche il vertice sarebbe già stato raggiunto in precedenza). Ciò prova che, durante il percorso in questione, si percorrerà un numero di lati distinti pari almeno al numero di nuovi vertici raggiunti, cioè almeno pari a 9.

Questo ragionamento prova, quindi, che il numero minimo di coppie buone è maggiore o uguale a 9. Proviamo adesso che è possibile costruire una colorazione che abbia esattamente 9 coppie buone.

Dati 10 punti, si può costruire un grafo connesso avente esattamente 9 lati scegliendo un punto qualunque e collegando ognuno dei rimanenti 9 vertici ad esso attraverso un lato. Ciò suggerisce in che modo costruire una colorazione della scacchiera con esattamente 9 coppie buone: occorre fissare un colore C e fare in modo che tutte le caselle di altri colori abbiano caselle adiacenti di colore C. Un modo possibile per farlo è colorare del colore C le 32 caselle della scacchiera solitamente colorate di nero e successivamente colorare con i rimanenti 9 colori le caselle restanti (usando tutti i colori).

Esercizio 13. Sia M il punto medio di BC e, considerata la circonferenza Γ circoscritta ad ABC, sia T il punto medio dell'arco BC non contenente A. Si ha che MT è l'asse del segmento BC e inoltre la bisettrice AI dell'angolo $\widehat{CAB}$ incontra Γ proprio in T (perché?). Siccome G è il baricentro di ABC, esso divide la mediana AM in due parti tali che $\frac{MG}{GA} = \frac{1}{2}$. Siccome OG e AT sono parallele, per il Teorema di Talete si ha che

$$\frac{MO}{OT} = \frac{MG}{GA} = \frac{1}{2}. \qquad (10)$$



Siccome OT e OC sono raggi della circonferenza Γ si ha che $OT = OC$, quindi dalla (10) deduciamo che

$$OM = \frac{OT}{2} = \frac{OC}{2}.$$

Quindi il triangolo OMC è rettangolo in M e ha un cateto uguale a metà ipotenusa. Quindi è metà di un triangolo equilatero e quindi $\widehat{MOC} = 60°$. Per simmetria, anche $\widehat{MOB} = 60°$, quindi $\widehat{COB} = 120°$. L'angolo $\widehat{CAB}$, essendo angolo alla circonferenza che insiste sull'angolo al centro $\widehat{BOC}$ (quello ottuso, che misura $360° - 120° = 240°$) avrà ampiezza pari alla sua metà: $\widehat{CAB} = \frac{240°}{2} = 120°$. Per calcolare l'area di ABC si può quindi usare il teorema dei seni oppure, in alternativa , calcolare ad esempio l'altezza relativa al lato AB osservando che, detta K la proiezione di C su AB, si ha che $\widehat{CAK} = 60°$, quindi $CK = \frac{AC}{2}\sqrt{3} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$. L'area del triangolo è quindi

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{CK \cdot AB}{2} = \frac{5 \cdot 12}{4}\sqrt{3} = 15\sqrt{3}.$$