

Esercizi

Trieste, 23 Gennaio 2019

Esercizio 1. Calcolare la somma di tutti i numeri tra 1 e 2019, eccetto quelli multipli di 3 oppure di 5.

Esercizio 2. Siano α e β le radici del polinomio $P(x) = ax^2 + (8b - 13)x + 2b + 1$, dove a e b sono due numeri reali con $a \neq 0$. Sapendo che $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ è un numero intero, quanto vale al massimo b ?

Esercizio 3. Quanti sono i quadrati perfetti compresi tra 13 e 2019! che terminano con 45 oppure con 54?

Esercizio 4. Alice, Bob, Carlo e Daniela fanno a gara a chi conosce più numeri primi. In quanti modi diversi possono piazzarsi in classifica? (Considerare che è possibile che si verifichino dei pareggi, nel caso in cui due o più persone conoscano la stessa quantità di numeri primi).

Esercizio 5 (Azerbaijan Junior Mathematical Olympiad 2016). Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza di centro O e raggio 7 cm. Sia Γ un'altra circonferenza passante per A e per B che interseca i lati AC e BC nei punti P e Q rispettivamente, tali che $PQ = 4$ cm. Sapendo che il quadrilatero $OPCQ$ è convesso, calcolare la sua area.

Esercizio 6. Quanti sono gli interi n tali che $3n + 4$ è un divisore di $6n + 2027$?

Esercizio 7. Quanti sono i numeri di tre cifre n tali che sottraendo da n la somma delle sue cifre si ottiene 234?

Esercizio 8. Con quanti zeri termina 2019!?

Esercizio 9. Trovare tutte le coppie di numeri primi (p, q) tali che $p^2 - 2q^2 = 1$.

Esercizio 10. In una sfida a freccette il bersaglio ha la forma di un triangolo equilatero di lato 40 cm. Maria colpisce il triangolo con 5 freccette. Considerando le due freccette più vicine fra loro, quanto vale al massimo la loro distanza?

Esercizio 11. Sia $P(x)$ un polinomio di grado 2018 tale che per ogni intero $0 \leq n \leq 2018$ valga $P(n) = \frac{2n+1}{n+3}$. Determinare $P(2019)$.

Esercizio 12. Le caselle di una tabella 8×8 vengono colorate utilizzando 10 colori diversi (tutti i colori vengono impiegati) in modo tale che due caselle adiacenti (cioè aventi un lato in comune) non abbiano mai lo stesso colore. Una coppia (non ordinata) di colori è considerata "buona" se sulla tabella sono presenti due caselle adiacenti aventi questi due colori. Qual è il numero minimo di coppie "buone"?

Esercizio 13. Sia ABC un triangolo con $AB = 12$ cm e $AC = 5$ cm. Siano I , G e O rispettivamente l'incentro, il baricentro e il circocentro del triangolo. Sapendo che IA e GO sono paralleli determinare l'area di ABC .