Capitolo 1

PROBLEMI INIZIALI PER ODE

Consideriamo il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie (ODE) ai valori iniziali:

$$(1.1) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è continua ed $y_0 \in \mathbb{R}^m$.
Diremo soluzione di (1) ogni funzione $y \in C^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ che la verifica.

Teorema 1 *Se la funzione f è continua in entrambe le variabili t e y ed è lipschitziana nel dominio $[t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m$ rispetto ad y, allora il problema (1.1) ammette un'unica soluzione $y \in C^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$.*

Prima di vederne la dimostrazione, ricordiamo che f è lipschitziana in $[t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m$ rispetto ad y se esiste una costante (di Lipschitz) $L > 0$ tale che, per una certa norma $|\cdot|$ definita in $\mathbb{R}^m$, si ha:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \; L\, |y_1 - y_2| \qquad \forall\, t \in [t_0, t_f] \text{ e } \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m.$$

Proponiamo due dimostrazioni del teorema. Entrambe fanno uso del teorema delle contrazioni in spazi metrici completi. Inoltre, per entrambe le dimostrazioni, faremo uso del fatto che il problema (1.1) è equivalmente alla seguente equazione integrale in $C^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$:

$$(1.2) \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))dx, \quad t_0 \leq t \leq t_f.$$

La verifica di ciò è banale.

Dimostrazione n. 1
Dividiamo l'intervallo $[t_0, t_f]$ in un certo numero N di sottointervalli di uguale lunghezza T (ma non è necessario) tale che risulti

$$LT < 1.$$

Definiamo poi $t_n := t_0 + nT$, $n = 1, ..., N$, e l'operatore

$$\Phi_n : \mathbb{R}^m \times C^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m) \to C^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$$

tale che

$$\Phi_n(u, y) := u + \int_{t_{n-1}}^{t} f(x, y(x))dx, \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n.$$

Si ha che $\forall\, u \in \mathbb{R}^m$ l'operatore di $C^0([t_{n-1}, t_n], \mathbb{R}^m)$

$$\Phi_n^*(u) : y \to \Phi_n(u, y)$$

è una contrazione nella norma uniforme così definita:

$$\|y\|_\infty := \max_{t_{n-1} \leq t \leq t_n} |y(t)|\,.$$

Infatti $\forall\, y, z \in C^0([t_{n-1}, t_n], \mathbb{R}^m)$ si ha:

$$\begin{aligned}
\|\Phi_n(u, y) - \Phi(u, z)\| &= \max_{t_{n-1} \leq t \leq t_n} \left| u + \int_{t_{n-1}}^{t} f(x, y(x))\, dx - u - \int_{t_{n-1}}^{t} f(x, z(x))\, dx \right| \\
&\leq \max_{t_{n-1} \leq t \leq t_n} \int_{t_{n-1}}^{t} |f(x, y(x)) - f(x, z(x))|\, dx \\
&\leq \max_{t_{n-1} \leq t \leq t_n} L \int_{t_{n-1}}^{t} |y(x) - z(x)|\, dx \\
&\leq LT \|y - z\|_\infty\,,
\end{aligned}$$

cioè

$$\|\Phi_n(u,y) - \Phi_n(u,z)\|_\infty \leq LT\,\|y - z\|_\infty$$

e quindi l'asserto, essendo $LT < 1$.
Quanto appena dimostrato permette di affermare che esiste un'unica soluzione del problema

$$y = \Phi_1(y_0, y),$$

cioè di

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\,dx, \qquad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Esiste poi un'unica soluzione del problema

$$y = \Phi_2(y(t_1), y),$$

cioè di

$$y(t) = y(t_1) + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\,dx, \qquad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Chiaramente la funzione y, definita su $[t_0, t_2]$ ed ottenuta risolvendo in sequenza i due precedenti problemi separatamente su $[t_0, t_1]$ e $[t_1, t_2]$, è soluzione di

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\,dx, \qquad t_0 \leq t \leq t_2.$$

Infatti, per $t_1 \leq t \leq t_2$ si ha:

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(x, y(x))\,dx \\ &= y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(x, y(x))\,dx + \int_{t_1}^{t} f(x, y(x))\,dx \\ &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\,dx. \end{aligned}$$

Analogamente, ragionando in modo induttivo sugli altri intervalli rimanenti, si ottengono esistenza ed unicità della soluzione di (1.2). CVD

Si noti che il risultato è valido anche per $t_f = +\infty$, cioè per equazioni definite su tutto il semiasse $[t_f, +\infty)$.
Si noti inoltre che l'operatore Φ definito da (1.2) in $C^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$, cioè tale che

$$\Phi(y)(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\, dx\ , \qquad t_0 \le t \le t_f,$$

non è una contrazione in $\|\cdot\|_\infty$ se $L(t_f - t_0) \ge 1$.

Dimostrazione n. 2
Questa volta dimostriamo che l'operatore Φ definito da (1.2) è una contrazione in una norma equivalente alla norma $\|\cdot\|_\infty$, il che è sufficiente per ottenere la tesi.
Definiamo la seguente norma su $C^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$:

$$\|y\|_* := \max_{t_0 \le t \le t_f} e^{-\rho(t-t_0)} \left| y(t) \right|,$$

dove ρ è fissato, $\rho \ge L$ (costante di Lipschitz di f).
Si ha immediatamente che

$$\|y\|_* \le \|y\|_\infty \le e^{\rho(t_f - t_0)} \|y\|_* \quad \forall\, y \in C^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$$

e, pertanto, le due norme sono equivalenti (qui si suppone sempre $t_f < +\infty$).
Verifichiamo ora che Φ è una contrazione in $\|\cdot\|_*$. Si ha $\forall\, y, z \in C^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_* &= \max_{t_0 \le t \le t_f} e^{-\rho(t-t_0)} \left| \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\, dx - \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\, dx \right| \\
&\le \max_{t_0 \le t \le t_f} e^{-\rho(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} L \left| y(x) - z(x) \right|\, dx \\
&= \max_{t_0 \le t \le t_f} e^{-\rho(t-t_0)} L \int_{t_0}^{t} e^{\rho(x-t_0)} e^{-\rho(x-t_0)} \left| y(x) - z(x) \right|\, dx \\
&\le \max_{t_0 \le t \le t_f} e^{-\rho(t-t_0)} L \|y - z\|_* \int_{t_0}^{t} e^{\rho(x-t_0)}\, dx \\
&\le \max_{t_0 \le t \le t_f} \frac{L}{\rho} \|y - z\|_* (1 - e^{-\rho(t-t_0)}) \\
&= \frac{L}{\rho} (1 - e^{-\rho(t_f - t_0)}) \|y - z\|_*,
\end{aligned}$$

cioè

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_* \leq \frac{L}{\rho}(1 - e^{-\rho(t_f - t_0)})\, \|y - z\|_*$$

e quindi l'asserto, essendo $\frac{L}{\rho} \leq 1$ ed $e^{-\rho(t_f - t_0)} > 0$. CVD

L'applicazione iterata dell'operatore Φ ad un'approssimazione iniziale $y_0(t)$, in modo da formare la successione di funzioni $\{y_k(t)\}$ che converge uniformemente alla soluzione y di (1.2), può essere considerata un metodo costruttivo per la soluzione di (1.1).
Questo metodo, noto con il nome di **metodo iterativo di Picard**, non è però usato nella pratica in quanto lentamente convergente.
Si noti che esso è definito da

$$y_k(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y_{k-1}(x))\, dx\ , \qquad t_0 \leq t \leq t_f.$$

In mancanza di ragioni particolari che consiglino scelte diverse, si pone $y_0(t) \equiv y_0$ per iniziale il processo iterativo.
Vale la pena di notare che, in molti casi di utilità pratica, la funzione f che compare in (1.1) non verifica la condizione di Lipschitz che abbiamo supposto in precedenza. In casi del genere l'esistenza ed unicità della soluzione non è più garantita su tutto $[t_0, t_f]$, ma si hanno invece teoremi di esistenza ed unicità di carattere locale.
Tuttavia, noi ci mettiamo per semplicità nelle ipotesi più restrittive, dato che il nostro scopo è quello di studiare i metodi numerici nelle loro potenzialità generali, lasciando (almeno per il momento) da parte la trattazione di casi particolari e/o casi in cui vengono a mancare certe condizioni di regolarità.
Dopo aver analizzato sommariamente il problema dell'esistenza ed unicità di soluzioni, passiamo a trattare brevemente quello della dipendenza continua dai dati iniziali.

Teorema 2 *Se la funzione f è continua in entrambe le variabili t e y ed è lipschitziana nel dominio $[t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m$ rispetto ad y, allora la soluzione di (1.1) e quella del problema*

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)), & t_0 \leq t \leq t_f \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

corrispondente ad un altro dato iniziale z_0*, verificano la seguente disuguaglianza:*

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{L(t-t_0)} |y_0 - z_0| \ , \quad t_0 \leq t \leq t_f,$$

dove L *è la costante di Lipschitz di* f*.*

Dimostrazione (è in sostanza la dimostrazione del Lemma di Gronwall)
E' chiaro che z è soluzione del problema

$$z(t) = z_0 + \int_{t_o}^{t} f(x, z(x))\, dx \ , \quad t_0 \leq t \leq t_f.$$

Pertanto, essendo y soluzione di (1.2), si ha

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &\leq |y_0 - z_0| + \int_{t_0}^{t} |f(x, y(x)) - f(x, z(x))|\ dx \\ &\leq |y_0 - z_0| + L \int_{t_0}^{t} |f(x, y(x)) - f(x, z(x))|\ dx \ . \end{aligned}$$

Dunque, posto

$$\varphi(t) := \int_{t_0}^{t} |y(x) - z(x)|\ dx,$$

si ottiene $\varphi(t_0) = 0$ e

$$(1.3) \qquad \varphi'(t) - L\varphi(t) \leq |y_0 - z_0| \ .$$

Posto ancora $\alpha(t) := \phi'(t) - L\phi(t)$, si ha pertanto $\alpha(t) \leq |y_0 - z_0|$. Ora l'equazione differenziale scalare

$$\begin{cases} \varphi'(t) - L\varphi(t) = \alpha(t) \ , & t_0 \leq t \leq t_f \\ \varphi(t_0) = 0 \end{cases}$$

ammette come unica soluzione la funzione

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} e^{L(t-x)} \alpha(x)\, dx$$

e, quindi, essendo $\alpha(t) \leq |y_0 - z_0|$, si ha

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &\leq e^{L(t-t_0)}\,|y_0 - z_0| \int_{t_0}^{t} e^{-L(x-t_0)}\,dx \\
&= \frac{1}{L}\,|y_0 - z_0|\,(e^{L(t-t_0)} - 1)\;.
\end{aligned}
$$

Da questo e da (1.3) segue infine:

$$
\begin{aligned}
|y(t) - z(t)| &= \varphi'(t) \\
&\leq L\varphi(t) + |y_0 - z_0| \\
&\leq |y_0 - z_0|\,e^{L(t-t_0)}\;.
\end{aligned}
$$

CVD

Si noti che questo teorema fornisce anche un primo criterio per valutare il condizionamento del problema differenziale (1.1). Sembrerebbe evidente che esso risulti tanto meglio condizionato quanto più piccola è la costante di Lipschitz L. Tuttavia vedremo in seguito, utilizzando la cosiddetta **costante di Lipschitz destra**, che questa conclusione non è in generale corretta.