

Capitolo 3

CONDIZIONI DELL'ORDINE DEI METODI RK

3.1 Generalità

In generale, un metodo RK ha la seguente forma:

$$K_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} K_j), \quad i = 1, \dots, \nu$$
$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{\nu} w_i K_i$$

e quindi è determinato dalla matrice $A := ((a_{ij}))$ di tipo $\nu \times \nu$ e dai vettori $\underline{c} := (c_1, \dots, c_\nu)^T$ e $\underline{w} := (w_1, \dots, w_\nu)^T$.

Inoltre valgono sempre le seguenti relazioni:

$$c_i = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\nu} w_i = 1.$$

Osserviamo ora che non è restrittivo considerare sistemi differenziali autonomi, cioè del tipo

$$(1) \quad \begin{cases} y' = f(y) & y \in \mathbb{R}^n, \text{ con } n \geq 2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

in luogo di

$$(2) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & y \in \mathbb{R}^n, \text{ con } n \geq 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Infatti, con la posizione $z(x) := (x, y(x))$, se in (2) $y \in \mathbb{R}^n$, allora si ottiene il seguente sistema differenziale autonomo equivalente in $z \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$(3) \quad \begin{cases} z' = F(z) := (1, f(z)) \\ z(x_0) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

Per quanto riguarda la soluzione numerica, applicando formalmente il metodo RK al sistema autonomo equivalente (3), si ha:

$$\begin{aligned} H_i &= F(z_0 + h \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} H_j), \quad i = 1, \dots, \nu \\ z_1 &= z_0 + h \sum_{i=1}^{\nu} w_i H_i \end{aligned}$$

Essendo $F = (1, f)$, la prima componente dei vettori H_i è sempre uguale ad 1. Possiamo porre pertanto $H_i := (1, \bar{H}_i)$, cioè definire \bar{H}_i come il vettore formato dalle ultime n componenti di H_i , ed ottenere allora:

$$\bar{H}_i = f(x_0 + h \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}, y_0 + h \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} \bar{H}_j), \quad i = 1, \dots, \nu$$

da cui si deduce che $\bar{H}_i = K_i$, $i = 1, \dots, \nu$, essendo $c_i = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}$. Essendo inoltre $\sum_{i=1}^{\nu} w_i = 1$, si ha anche $z_1 = (x_0 + h, y_1)$ e, pertanto, si ottiene pure la stessa soluzione numerica.

Concludendo, considereremo d'ora in poi sistemi autonomi del tipo (1).

Definizione 1 *Un metodo RK ha **ordine** $p \geq 1$ se*

$$\sigma(x_0, h) = y(x_0 + h) - y_1 = O(h^{p+1})$$

per tutte le equazioni differenziali del tipo (1) in cui $f \in \mathbb{C}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Sia la soluzione esatta $y(x_0 + h)$ che la soluzione numerica y_1 possono essere sviluppate in polinomio di Taylor nel punto x_0 .

Le condizioni dell'ordine sui coefficienti del metodo si ottengono dunque uguagliando tutti i termini dei due sviluppi fino all'ordine p compreso.

3.2 Sviluppo della soluzione esatta

Nell'ipotesi che la funzione a membro destro $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, la soluzione esatta del problema iniziale (1) ammette il seguente sviluppo di Taylor:

$$y(x_0 + h) = y_0 + \sum_{r=1}^p \frac{h^r}{r!} y^{(r)}(x_0) + O(h^{p+1}).$$

Tenendo presente che $y'(x) = f(y(x))$, calcoliamo dunque $y^{(r)}(x_0)$, $r = 1, \dots, p$. Per fare ciò, calcoliamo preventivamente le espressioni delle derivate nel generico punto x .

Abbiamo che

$$y''(x) = f'(y(x))y'(x) = f'(y(x))f(y(x)),$$

dove f' è il differenziale primo di f e, quindi,

$$f' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

e $f'(y(x)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} y'''(x) &= \frac{d}{dx}[f'(y(x))f(y(x))] \\ &= f''(y(x))y'(x)f(y(x)) + f'(y(x))f'(y(x))y'(x) \\ &= f''(y(x))f(y(x))f(y(x)) + f'(y(x))f'(y(x))f(y(x)), \end{aligned}$$

dove f'' è il differenziale secondo di f e, quindi,

$$f'' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)),$$

$f''(y(x)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ e $f''(y(x))f(y(x)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Abbiamo poi

$$\begin{aligned}
y^{IV}(x) &= \frac{d}{dx}[f''(y(x))f(y(x))f(y(x)) + f'(y(x))f'(y(x))f(y(x))] \\
&= f'''(y(x))y'(x)f(y(x))f(y(x)) + f''(y(x))f'(y(x))y'(x)f(y(x)) + \\
&\quad + f''(y(x))f(y(x))f'(y(x))y'(x) + f''(y(x))y'(x)f'(y(x))f(y(x)) + \\
&\quad + f'(y(x))f''(y(x))y'(x)f(y(x)) + f'(y(x))f'(y(x))f'(y(x))y'(x) \\
&= f'''(y(x))f(y(x))f(y(x))f(y(x)) + f''(y(x))f'(y(x))f(y(x))f(y(x)) + \\
&\quad + 2f''(y(x))f(y(x))f'(y(x))f(y(x)) + f'(y(x))f''(y(x))f(y(x))f(y(x)) + \\
&\quad + f'(y(x))f'(y(x))f'(y(x))f(y(x)),
\end{aligned}$$

dove f''' è il differenziale terzo di f e, quindi,

$$f''' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))),$$

$f'''(y(x)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)))$, $f'''(y(x))f(y(x)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ e $f'''(y(x))f(y(x))f(y(x)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

In generale, $y^{(k)}(x)$ coinvolge tutti i differenziali di f fino all'ordine $k - 1$. Per semplicità di notazione, nel calcolarli nel punto x_0 , poniamo semplicemente

$$f_0^{(k)} := f^{(k)}(y(x_0)).$$

Con questa notazione semplificata abbiamo:

$$\begin{aligned}
y'(x_0) &= f_0 \\
y''(x_0) &= f_0' f_0 \\
y'''(x_0) &= f_0'' f_0 f_0 + f_0' f_0' f_0 \\
y^{IV}(x_0) &= f_0''' f_0 f_0 f_0 + f_0'' f_0' f_0 f_0 + 2f_0'' f_0 f_0' f_0 + f_0' f_0'' f_0 f_0 + f_0' f_0' f_0' f_0
\end{aligned}$$

Consideriamo ora un differenziale k -esimo $f^{(k)}$. Si ha che

$$f^{(k)}(y) \in \underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \dots, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \dots))}_{k \text{ volte}}.$$

Sussiste un isomorfismo tra lo spazio appena menzionato e lo spazio delle forme k -lineari su \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R}^n , cioè

$$\mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ volte}}, \mathbb{R}^n).$$

Pertanto $f_0^{(k)}$ può essere interpretato come un elemento di tale spazio, che agisce dunque su una k -upla di vettori e fornisce a sua volta un vettore. Si ha, cioè, ad esempio, la seguente uguaglianza:

$$f_0'' f_0 f_0' f_0 = f_0''(f_0, f_0'(f_0)).$$

f_0 si può convenzionalmente chiamare **forma 0-lineare**, in quanto non agisce su alcun vettore (è essa stessa un vettore), mentre f_0' è una forma 1-lineare. Le $f_0^{(k)}$ sono inoltre **simmetriche** nei loro argomenti, in quanto sono rappresentabili come segue:

$$f_0^{(k)} \equiv \left(\frac{\partial^k f_i(y(x_0))}{\partial y_{j_1} \dots \partial y_{j_k}} \right)_{i, j_1, \dots, j_k = 1, \dots, n}$$

ed agiscono nel modo seguente:

$$f_0^{(k)}(\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}) = \sum_{j_1, \dots, j_k}^{1, n} \frac{\partial^k f}{\partial y_{j_1} \dots \partial y_{j_k}}(y(x_0)) \varphi_{j_1}^{(1)} \dots \varphi_{j_k}^{(k)}.$$

La simmetria è conseguenza della commutatività dell'operazione di derivazione parziale (Teorema di Schwarz).

Ad esempio, nello sviluppo di $y^{IV}(t_0)$ si ha che

$$f_0'' f_0 f_0' f_0 = f_0''(f_0, f_0'(f_0)) = f_0''(f_0'(f_0), f_0) = f_0'' f_0' f_0 f_0.$$

Tenuto conto di tutto ciò possiamo scrivere allora:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= f_0 \\ y''(x_0) &= f_0'(f_0) \\ y'''(x_0) &= f_0''(f_0, f_0) + f_0'(f_0'(f_0)) \\ y^{IV}(x_0) &= f_0'''(f_0, f_0, f_0) + 3f_0''(f_0, f_0'(f_0)) + f_0'(f_0''(f_0, f_0)) + f_0'(f_0'(f_0'(f_0))) \end{aligned}$$

Ciascuno degli addendi si chiama **differenziale elementare**. Dai calcoli effettuati si evince una regola generale che permette di ricavare dai differenziali elementari di ordine r tutti quelli di ordine $r + 1$.

Osserviamo innanzitutto che ciascun differenziale elementare di ordine r è composto formalmente da r forme del tipo $f_0^{(k)}$ con $k \leq r - 1$. Allora da ciascuno di essi si ricavano r differenziali elementari di ordine $r + 1$, che si ottengono sostituendo una dopo l'altra ciascuna forma $f_0^{(k)}$ con $f_0^{(k+1)}$. Inoltre ciascuna forma $f_0^{(k+1)}$ si fa agire sulla $(k + 1)$ -upla di elementi formata dagli argomenti della $f_0^{(k)}$ e da una ulteriore 0-forma f_0 .

Ad esempio, il differenziale elementare di ordine 4 $f_0''(f_0, f_0'(f_0))$ fornisce i seguenti quattro differenziali elementari di ordine 5:

$$\begin{aligned} & f_0'''(f_0, f_0, f_0'(f_0)) \\ & f_0''(f_0'(f_0), f_0'(f_0)) \\ & f_0''(f_0, f_0''(f_0, f_0)) \\ & f_0''(f_0, f_0'(f_0'(f_0))) \end{aligned}$$

Notiamo infine che possono venir generati differenziali uguali (ad esempio, nel passaggio dall'ordine 3 all'ordine 4) e che quindi i differenziali elementari di ordine r sono in numero generalmente inferiore ad $(r - 1)!$. Essi possiedono però diversi coefficienti nella composizione di $y^{(r)}(x_0)$, la somma dei quali da' ovviamente $(r - 1)!$. I differenziali elementari possono venir convenientemente descritti mediante gli **alberi radicati**, di cui ora diamo la definizione ricorsiva.

Definizione 2 *Un **albero radicato** è un insieme finito di nodi t tale che:*

1. *esiste uno ed un solo nodo speciale, detto **radice**;*
2. *gli eventuali altri nodi sono ripartiti in m insiemi disgiunti t_1, \dots, t_m , ciascuno dei quali è a sua volta un albero (detto **sottoalbero**).*

Inoltre, anche l'insieme vuoto \emptyset è considerato un albero.

Con riferimento alla definizione, si scrive

$$t = [t_1, \dots, t_m],$$

cui corrisponde la rappresentazione grafica in Figura 3.1.

L'albero formato dalla sola radice si indica con $\tau = [\emptyset]$. Il numero di nodi $\rho(t)$ di un albero t si dice **ordine** dell'albero. L'insieme di tutti gli alberi

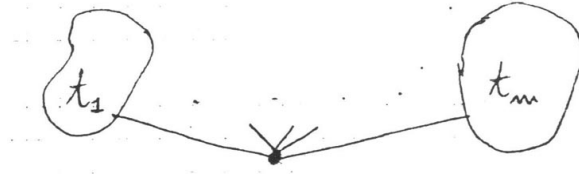


Figura 3.1: Rappresentazione grafica ricorsiva di albero radicato.

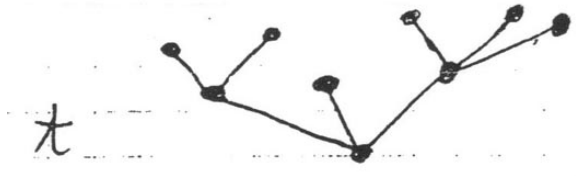


Figura 3.2: Esempio di albero radicato.

radicati si indica con \mathcal{T} . Un esempio di albero è dato in Figura 3.2. Per esso, utilizzando la definizione ricorsiva, si ha

$$t = [[\tau, \tau], \tau, [\tau, \tau, \tau]].$$

Esiste un'applicazione suriettiva

$$F : \mathcal{T} \rightarrow \{\text{differenziali elementari}\}$$

definita ricorsivamente nel modo seguente:

$$\begin{cases} F([t_1, \dots, t_m]) := f_0^{(m)}(F(t_1), \dots, F(t_m)) \\ F(\emptyset) := y_0 \\ F(\tau) := f_0 \end{cases}$$

Questa applicazione preserva l'ordine, ma non è iniettiva, in quanto ad alberi diversi può corrispondere il medesimo differenziale elementare.

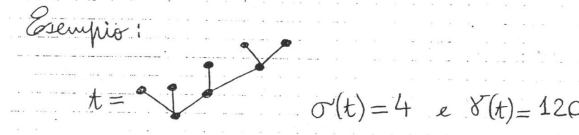
Ad esempio, gli alberi di Figura 3.3 danno origine al medesimo differenziale elementare

$$F(t_1) = f_0''(f_0, f_0''(f_0, f_0)) = F(t_2) = f_0''(f_0''(f_0, f_0), f_0).$$

Si definisce pertanto la seguente relazione di equivalenza in \mathcal{T} :



Figura 3.3: Alberi radicati equivalenti.

Figura 3.4: Esempio di albero t con relativi $\sigma(t)$ e $\gamma(t)$.

$$t_1 \sim t_2 \Leftrightarrow F(t_1) = F(t_2) \quad \forall \text{ equazione differenziale.}$$

Se $t_1 \sim t_2$, allora si ha ovviamente $\rho(t_1) = \rho(t_2)$. Inoltre sono invarianti rispetto agli elementi di una stessa classe di equivalenza anche le seguenti quantità:

$\sigma(t)$:= ordine del gruppo di simmetria di t ;

$\gamma(t)$:= prodotto degli ordini di tutti i sottoalberi di t , compreso t .

Con un leggero abuso di notazione, continueremo ad indicare con t la classe di equivalenza $[t]$ e con \mathcal{T} l'insieme quoziente \mathcal{T}/\sim . Rimane pertanto definita in modo ovvio un'applicazione biettiva di \mathcal{T} in $\{\text{differenziali elementari}\}$, che continueremo a chiamare F .

Indicheremo poi con \mathcal{T}_r l'insieme (delle classi di equivalenza) degli alberi di ordine r , per ogni $r \geq 1$. Da quanto visto, si ha pertanto che ad ogni albero t (cioè ad ogni classe di equivalenza) si può associare un coefficiente intero positivo $\alpha(t)$ tale che

$$y^{(r)}(x_0) = \sum_{t \in \mathcal{T}_r} \alpha(t) F(t)$$

e, quindi,

$$y(x_0 + h) = y_0 + \sum_{r=1}^p \frac{h^r}{r!} \sum_{t \in \mathcal{T}_r} \alpha(t) F(t) + O(h^{p+1}).$$

Sussiste il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, che permette di calcolare in modo semplice ed immediato i coefficienti $\alpha(t)$.

$\mathfrak{s}(t)$	t	$F(t)$
1		f_0
2		$f_0'(f_0)$
3		$f_0'(f_0'(f_0))$
		$f_0''(f_0, f_0)$
4		$f_0'(f_0'(f_0'(f_0)))$
		$f_0'(f_0''(f_0, f_0))$
		$f_0''(f_0, f_0'(f_0))$
		$f_0'''(f_0, f_0, f_0)$

Figura 3.5: Tabella di corrispondenza tra alberi radicati e differenziali elementari.

Teorema 1 Per ogni $t \in \mathcal{T}$ si ha

$$a(t) = \frac{\rho(t)!}{\sigma(t)\gamma(t)}.$$

Corollario 1 Se $f \in \mathbb{C}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, la soluzione esatta del problema iniziale (1) ammette il seguente sviluppo di Taylor:

$$y(x_0 + h) = y_0 + \sum_{r=1}^p h^r \sum_{t \in \mathcal{T}_r} \frac{1}{\sigma(t)\gamma(t)} F(t) + O(h^{p+1}).$$

La Figura 3.5 illustra la corrispondenza F tra alberi radicati (un rappresentante per ogni classe di equivalenza) e differenziali elementari fino all'ordine 4.

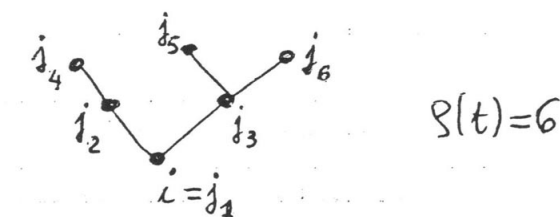


Figura 3.6: Indicizzazione dei nodi per il calcolo di $\Phi(t)$.

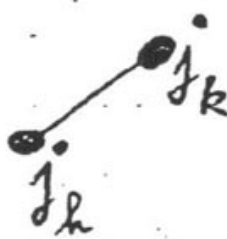


Figura 3.7: Nodi connessi indicati.

3.3 Sviluppo della soluzione numerica

Anche lo sviluppo di Taylor della soluzione numerica y_1 coinvolge i medesimi differenziali elementari che formano lo sviluppo di $y(x_0 + h)$. Si ha dunque

$$y_1 = y_0 + \sum_{r=1}^p h^r \sum_{t \in T_r} \beta(t) F(t) + O(h^{p+1}),$$

dove ovviamente i coefficienti $\beta(t)$ dipendono dai parametri A e \underline{w} che definiscono il metodo RK.

Dato un albero t (ossia una classe di equivalenza) resta univocamente definito il numero $\Phi(t)$ nel modo seguente: si attacca alla radice l'etichetta $i = j_1$ e via via agli altri nodi altre etichette $j_2, \dots, j_{\rho(t)}$ come in Figura 3.6.

L'ordine delle etichette j_k per $k = 2, \dots, \rho(t)$ non conta. In corrispondenza ad ogni connessione tra due nodi come in Figura 3.7 si considera il fattore $a_{j_h j_k}$. Inoltre si considera il fattore w_i (cioè w_{j_1}).

Infine si ottiene $\Phi(t)$ sommando tutti i monomi così ottenuti al variare di $i = j_1, j_2, \dots, j_{\rho(t)}$ da 1 a ν .

Nell'esempio di Figura 3.6 si ottiene

$$\Phi(t) = \sum_{i,j_2,\dots,j_6}^{1,\nu} w_i a_{ij_2} a_{j_2j_4} a_{ij_3} a_{j_3j_5} a_{j_3j_6}.$$

Ricordando che $\sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} = c_i$, si ha poi

$$\Phi(t) = \sum_{i,j_2,j_3}^{1,\nu} w_i a_{ij_2} a_{ij_3} c_{j_2} c_{j_3}^2.$$

Vale il seguente risultato (che non dimostriamo).

Teorema 2 *Per ogni $t \in \mathcal{T}$ si ha*

$$\beta(t) = \frac{\Phi(t)}{\sigma(t)}.$$

3.4 Condizione dell'ordine

Il Teorema 2 ed il Corollario 1 ci permettono di concludere con il seguente risultato.

Teorema 3 *Un metodo RK è di ordine p se e solo se*

$$\Phi(t) = \frac{1}{\gamma(t)} \quad \forall t \text{ tale che } \rho(t) \leq p.$$

Scriviamo le condizioni dell'ordine fino ad $r = \rho(t) = 4$ (vedi Figura 3.8). Per trovare metodi RK di un certo ordine p è dunque necessario e sufficiente trovare una matrice A ed un vettore \underline{w} che soddisfino le relative condizioni dell'ordine. Il numero di tali condizioni cresce molto rapidamente con l'ordine, rendendo sempre più onerosa la ricerca di una soluzione al sistema (non lineare) di equazioni che esse determinano. Comunque, più elevato è il numero ν di livelli rispetto all'ordine p voluto, più facile è trovare ovviamente una coppia A, \underline{w} che vada bene per nostri scopi. D'altra parte, più elevato è il numero di livelli ν del metodo, più è grande lo sforzo computazionale che il metodo stesso richiede ad ogni passo. Pertanto si cerca sempre di rendere minimo il numero di livelli.

$f(t)$	t	$\Phi(t) = 1/8(t)$
1		$\sum_{i=1}^{\nu} w_i = 1$
2		$\sum_{i=1}^{\nu} w_i c_i = \frac{1}{2}$
3		$\sum_{i=1}^{\nu} w_i c_i^2 = \frac{1}{3}$ $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} w_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$
4		$\sum_{i=1}^{\nu} w_i c_i^3 = \frac{1}{4}$ $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} w_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8}$ $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} w_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12}$ $\sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq j, k}} w_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24}$

Figura 3.8: Condizioni dell'ordine.

La seguente tabella indica il numero di condizioni dell'ordine (cioè il numero di differenziali elementari) fino a $p = 10$:

ordine p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n. condizioni	1	2	4	8	17	37	85	200	486	1205

Viene spontaneo chiedersi quale sia il massimo ordine p ottenibile con un certo numero di livelli ν . Nel caso generale si constata immediatamente che risulta

$$p \leq 2\nu .$$

Infatti, applicando il metodo all'equazione differenziale particolare

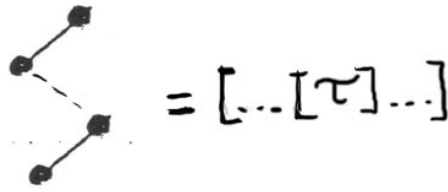


Figura 3.9: Albero stecco.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $y(x_0+h) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx$, si ottiene la formula di quadratura

$$y_1 = h \sum_{i=1}^{\nu} w_i f(c_i)$$

e, pertanto, da quanto noto dalla teoria dell'integrazione, si ha che

$$|y(x_0+h) - y_1| = O(h^{p+1}) \quad \forall f \in \mathcal{C}^p,$$

dove $p \leq 2\nu$. Di più, si ottiene $p = 2\nu$ solo nel caso in cui la formula di quadratura sia quella di Gauss-Legendre.

Si dimostra che esiste uno ed un solo metodo RK di ordine $p = 2\nu$, detto metodo di **collocazione gaussiana**.

Se ci si limita alla classe dei metodi espliciti, allora si ha invece

$$p \leq \nu.$$

Per vedere ciò, si noti che per ogni $r \geq 2$ esiste un differenziale elementare del tipo $f'_0(\dots f'_0(f_0)\dots)$ (dove gli f'_0 annidati sono in numero di $r-1$) che corrisponde all'albero in Figura 3.9, detto **albero stecco**.

La relativa condizione dell'ordine è

$$\Phi(t) = \sum_{i,j_2,\dots,j_{r-1}}^{1,\nu} w_i a_{ij_2} \dots a_{j_{r-2}j_{r-1}} c_{j_{r-1}} = \frac{1}{\gamma(t)} = \frac{1}{r!}$$

$1 \leq p \leq 4$	\implies	$\nu \geq p$
$5 \leq p \leq 6$	\implies	$\nu \geq p+1$
$p=7$	\implies	$\nu \geq p+2$

Figura 3.10: Barriere dell'ordine per i metodi espliciti.

e, quindi, come subito si verifica,

$$\underline{w}^T A^{r-2} \underline{c} = \frac{1}{r!}.$$

Se il metodo è esplicito, la matrice A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu \nu-1} & 0 \end{pmatrix}$$

e, quindi, essendo essa di tipo $\nu \times \nu$, si ha che $A^r = 0 \quad \forall r \geq \nu$, mentre

$$A^{\nu-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a^* & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo però $c_1 = 0$, si ha che $A^{\nu-1} \underline{c} = \underline{0}$ e, quindi, $A^{r-2} \underline{c} = \underline{0} \quad \forall r \geq \nu+1$. Pertanto la sopra citata condizione dell'ordine può sussistere solo se $r \leq \nu$.

Si dimostra che la barriera $p \leq \nu$ è ottimale solo per $p \leq 4$, mentre per ordini superiori la barriera effettiva per p rispetto a ν diventa via via più restrittiva. In Figura 3.10 sono riportate le barriere ottimali (nel senso che esiste un metodo per il quale vale l'uguaglianza) fino all'ordine 7.

Per $p = 1$ l'unico metodo esplicito con $\nu = 1$ è quello di Eulero.

Nelle Figure 3.11, 3.12 e 3.13 riportiamo le condizioni dell'ordine per i metodi espliciti tali che $\nu = p$ per $p = 2, 3, 4$.

$p=2$

r	condizione
1	$w_1 + w_2 = 1$
2	$w_2 c_2 = \frac{1}{2}$

Figura 3.11: Condizioni dell'ordine $p = 2$.

$p=3$

r	condizione
1	$w_1 + w_2 + w_3 = 1$
2	$w_2 c_2 + w_3 c_3 = \frac{1}{2}$
3	$w_2 c_2^2 + w_3 c_3^2 = \frac{1}{3}$ $w_3 \rho_{32} c_2 = \frac{1}{6}$

Figura 3.12: Condizioni dell'ordine $p = 3$.

$p=4$

r	condizione
1	$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$
2	$w_2 c_2 + w_3 c_3 + w_4 c_4 = \frac{1}{2}$
3	$w_2 c_2^2 + w_3 c_3^2 + w_4 c_4^2 = \frac{1}{3}$ $w_3 \rho_{32} c_2 + w_4 (\rho_{42} c_2 + \rho_{43} c_3) = \frac{1}{6}$
4	$w_2 c_2^3 + w_3 c_3^3 + w_4 c_4^3 = \frac{1}{4}$ $w_3 \rho_{32} c_2^2 + w_4 (\rho_{42} c_2^2 + \rho_{43} c_3^2) = \frac{1}{12}$ $w_3 \rho_{32} c_2 c_3 + w_4 (\rho_{42} c_2 c_3 + \rho_{43} c_3^2) = \frac{1}{8}$ $w_4 \rho_{43} \rho_{32} c_2 = \frac{1}{24}$

Figura 3.13: Condizioni dell'ordine $p = 4$.

Come casi particolari riportiamo infine due esempi classici di metodi RK espliciti di ordine 3 e 4 rispettivamente.

$$\begin{aligned} \mathbf{p=3} \quad K_1 &= f(t_0, y_0) \\ K_2 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hK_1\right) \\ K_3 &= f\left(t_0 + h, y_0 + h(-K_1 + 2K_2)\right) \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p=4} \quad K_1 &= f(t_0, y_0) \\ K_2 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hK_1\right) \\ K_3 &= f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hK_2\right) \\ K_4 &= f\left(t_0 + h, y_0 + hK_3\right) \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{aligned}$$