

Capitolo 2

METODI A UN PASSO PER ODE

Sia assegnata la seguente equazione differenziale con condizione iniziale

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

dove $y : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$.

Assumiamo che f verifichi le condizioni atte ad assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione nell'intervallo $[t_0, t_f]$. Più precisamente assumiamo che in $[t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m$ la funzione f sia continua rispetto a (t, y) e lipschitziana rispetto a y con costante di Lipschitz L relativa alla norma $|\cdot|$ scelta in \mathbb{R}^m .

A tale proposito si rimanda all'inizio del Capitolo 1.

Per quanto riguarda le soluzioni numeriche, qui ci occuperemo soltanto di soluzioni **discrete**, cioè definite solo su un insieme discreto di valori di t .

Supponiamo assegnata una griglia di punti $\Delta = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f\}$ in $[t_0, t_f]$, anche a passo variabile $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ (vedi Figura 2.1).

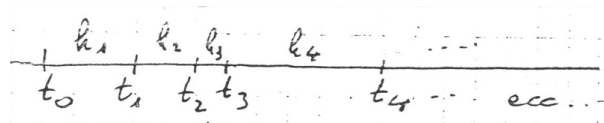


Figura 2.1: Esempio di griglia.

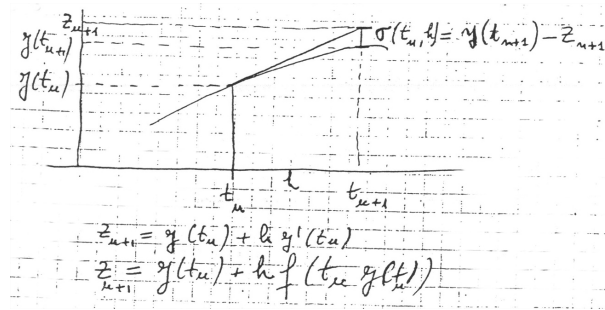


Figura 2.2: Metodo di Eulero ed errore locale di troncamento.

In generale un metodo fornisce un'approssimazione y_n di $y(t_n)$, cioè

$$y_n \approx y(t_n),$$

su ogni punto della griglia.

2.1 Il metodo di Eulero

Iniziamo con il considerare il metodo di Eulero, illustrato graficamente in Figura 2.2 (riferita al caso scalare $m = 1$), per fare qualche considerazione che può essere estesa a tutti i metodi a un passo.

L'idea che sta alla base del metodo di Eulero è quella di sostituire la curva integrale che passa per il punto del piano $(t_n, y(t_n))$, cioè il grafico della soluzione del sistema (2.1), con la retta tangente a detta curva in tale punto. Usandolo in maniera ricorsiva a partire dal punto iniziale t_0 fino al punto finale $t_N = t_f$, otteniamo la formula

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} f(t_n, y_n)$$

che, a partire da $y_0 = y(t_0)$, definisce una successione (finita) $\{y_n\}_0^N$. Ogni valore y_n di questa successione differisce dal corrispondente valore esatto $y(t_n)$ per l'accumulo dei due seguenti tipi di errore.

- L'errore

$$E_1 = \sigma(t_n, h_{n+1}) = y(t_{n+1}) - z_{n+1}$$

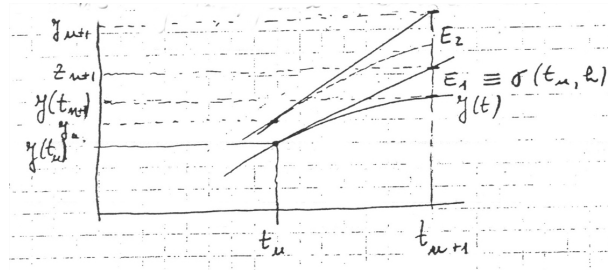


Figura 2.3: Errore locale di troncamento ed errore propagato.

è l'**errore locale di troncamento** ed è l'errore dovuto all'impiego del valore approssimato $z_{n+1} = y(t_n) + h_{n+1}f(t_n, y(t_n))$ fornito dal metodo, applicato idealmente con passo h_{n+1} ad un valore della soluzione esatta $y(t_n)$ (si vedano le Figure 2.2 e 2.3).

- L'errore

$$E_2 = z_{n+1} - y_{n+1}$$

è l'**errore propagato** ed è dovuto al fatto che il metodo è comunque applicato ad un valore y_n della soluzione approssimata e non al valore esatto $y(t_n)$ (si veda ancora la Figura 2.3).

Detto $e_n = y(t_n) - y_n$ l'**errore globale** in t_n , $n = 0, 1, \dots, N$, si ha dunque:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \underbrace{y(t_{n+1}) - z_{n+1}}_{E_1} + \underbrace{z_{n+1} - y_{n+1}}_{E_2} \\ &= \underbrace{y(t_n) + h_{n+1}f(t_n, y(t_n))}_{z_{n+1}} - \underbrace{[y_n + h_{n+1}f(t_n, y_n)]}_{y_{n+1}} + \sigma(t_n, h_{n+1}) \end{aligned}$$

e quindi la formula ricorsiva

$$|e_{n+1}| \leq (1 + h_{n+1}L) |e_n| + |\sigma(t_n, h_{n+1})|, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

dove L è la costante di Lipschitz di f .

Cerchiamo ora una maggiorazione di $\sigma(t_n, h_{n+1})$ o, più in generale, di

$$\Sigma(h) = \max_{t_0 \leq t \leq t_f} |\sigma(t, h)|.$$

A tale scopo, supponiamo che sia $f \in C^1([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, in modo che risulti $y \in C^2([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$.

Poichè

$$\begin{aligned}\sigma(t, h) &= y(t+h) - [y(t) + hf(t, y(t))] \\ &= y(t+h) - y(t) - hy'(t),\end{aligned}$$

sviluppando ogni componente y_i , $i = 1, \dots, m$, in un intorno di t mediante la formula di Taylor

$$y_i(t+h) = y_i(t) + hy'_i(t) + \frac{h^2}{2} y''_i(\xi_i), \quad \xi_i \in (t, t+h),$$

si ottiene

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} |\sigma(t, h)|_\infty \leq \frac{h^2}{2} \max_{t_0 \leq t \leq t_f} |y''(t)|_\infty,$$

dove $|\cdot|_\infty$ è la norma infinito in \mathbb{R}^m .

Essendo tutte le norme in \mathbb{R}^m equivalenti, si conclude che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\Sigma(h) \leq Ch^2.$$

Si può pertanto concludere che gli errori globali del metodo di Eulero verificano la formula ricorsiva

$$|e_{n+1}| \leq (1 + h_{n+1}L) |e_n| + Ch_{n+1}^2, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Dal momento che $e_0 = y(t_0) - y_0 = 0$, come vedremo nella Sezione 2.3 per i metodi ad un passo in generale, da questa formula si ottiene che

$$\max_{0 \leq n \leq N} |e_n| \leq \frac{e^{L(t_f-t_0)} - 1}{L} \max_{1 \leq n \leq N} h_n,$$

ossia il massimo errore globale tende a zero con ordine 1 rispetto al massimo passo della griglia utilizzata.

Infatti il metodo di Eulero è un metodo di **ordine 1**.

2.2 Altri esempi di metodi ad un passo

Introduciamo per via geometrica alcuni altri esempi di metodi a un passo, riferendoci per l'illustrazione grafica sempre al caso scalare $m = 1$.

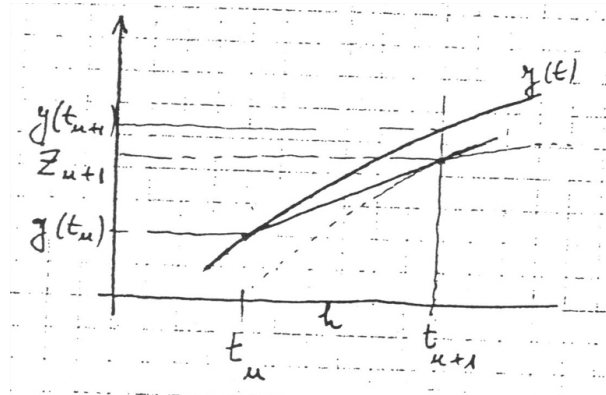


Figura 2.4: Metodo di Eulero implicito.

2.2.1 Metodo di Eulero implicito

Modifichiamo il metodo di Eulero utilizzando come retta uscente dal punto $(t_n, y(t_n))$ quella retta che risulta tangente ad una curva integrale del sistema (2.1) in un punto del piano di ascissa t_{n+1} ed opportuna ordinata z_{n+1} (si veda la Figura 2.4).

Pertanto otteniamo in maniera ricorsiva, a partire dal punto iniziale t_0 fino al punto finale $t_N = t_f$, la seguente formula, che ad ogni passo definisce un'equazione da risolvere (da cui il nome di metodo di Eulero **implicito**):

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1}f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

2.2.2 Metodo di Heun

Poichè esiste una retta che congiunge i punti $(t_n, y(t_n))$ e $(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$, se fosse noto il suo coefficiente angolare ρ_{n+1} , la formula

$$z_{n+1} = y(t_n) + h_{n+1}\rho_{n+1}$$

darebbe il valore esatto $y(t_{n+1})$.

Cerchiamo quindi un'approssimazione di ρ_{n+1} più vicina al valore vero di quanto non lo siano le approssimazioni considerate nei due metodi di Eulero appena visti.

Un modo possibile è fare la media tra il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della soluzione in $(t_n, y(t_n))$ e la retta tangente alla curva integrale passante per il punto $(t_{n+1}, y(t_n) + h_{n+1}f(t_n, y(t_n)))$.

Questa scelta conduce alla formula

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \left[\frac{1}{2}f(t_n, y_n) + \frac{1}{2}f(t_{n+1}, y_n + h_{n+1}f(t_n, y_n)) \right]$$

che è nota come **metodo di Heun**.

2.2.3 Metodi Runge-Kutta espliciti a 2 livelli

Più in generale, possiamo pensare ad una formula del tipo

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1}[b_1f(t_n, y_n) + b_2f(t_n + ch_{n+1}, y_n + ah_{n+1}f(t_n, y_n))],$$

dove i parametri b_1, b_2, c, a sono da determinarsi in maniera opportuna.

La formula precedente può essere riscritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} K_{n+1}^1 &= f(t_n, y_n) \\ K_{n+1}^2 &= f(t_n + ch_{n+1}, y_n + ah_{n+1}K_{n+1}^1) \\ y_{n+1} &= y_n + h_{n+1}(b_1K_{n+1}^1 + b_2K_{n+1}^2) \end{aligned}$$

Questa formula costituisce un caso particolare della classe dei metodi che presentiamo nel prossimo paragrafo. Più precisamente, essa risulta essere un **metodo Runge-Kutta esplicito a 2 livelli** (o stadi).

2.2.4 Metodi Runge-Kutta

La generalizzazione del metodo precedente porta alla seguente classe dei **metodi Runge-Kutta espliciti** ad s livelli (o stadi):

$$\begin{aligned}
 K_{n+1}^1 &= f(t_n, y_n) \\
 K_{n+1}^i &= f(t_n + c_i h_{n+1}, y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_{n+1}^j), \quad i = 2, \dots, s \\
 y_{n+1} &= y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i K_{n+1}^i
 \end{aligned}$$

Il carattere esplicito è dovuto al fatto che le somme su j nel calcolo di ciascun K_{n+1}^i coinvolgono solo i K_{n+1}^j con $j \leq i - 1$, che sono già stati calcolati. Si noti che la matrice A formata dai parametri a_{ij} è **triangolare inferiore in senso stretto**.

Nel caso le somme su j siano estese fino a i , le formule sono dette **semi-implicite** in quanto ciascun K_{n+1}^i coinvolge, oltre ai precedenti K_{n+1}^j con $j \leq i - 1$, anche se stesso, e si ha:

$$\begin{aligned}
 K_{n+1}^i &= f(t_n + c_i h_{n+1}, y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^i a_{ij} K_{n+1}^j), \quad i = 1, \dots, s \\
 y_{n+1} &= y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i K_{n+1}^i
 \end{aligned}$$

Si noti che in questo caso la matrice A formata dai parametri a_{ij} è **triangolare inferiore**, ma non in senso stretto, e ad ogni passo è richiesta la risoluzione di s sistemi di equazioni di dimensione m ciascuno.

Se invece le somme sono estese fino ad s , le formule sono dette **implicite** in quanto ciascun K_{n+1}^i coinvolge tutti gli altri K_{n+1}^j compreso se stesso, e si ha:

$$\begin{aligned}
 K_{n+1}^i &= f(t_n + c_i h_{n+1}, y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s a_{ij} K_{n+1}^j), \quad i = 1, \dots, s \\
 y_{n+1} &= y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i K_{n+1}^i
 \end{aligned}$$

Si noti che in questo caso la matrice A formata dai parametri a_{ij} è una matrice in generale piena, e ad ogni passo è richiesta la risoluzione di un sistema di equazioni di dimensione $s \cdot m$.

E' evidente che c'è, nell'ordine, una crescita di complessità computazionale

nell'implementazione delle tre classi di metodi.

2.3 Teoria generale

In generale un **metodo a un passo** ha la forma

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1}\Phi(t_n, y_n, h_{n+1}, f)$$

ed è caratterizzato dal fatto che il valore approssimato y_{n+1} è ottenuto a partire da un solo valore precedente y_n .

Sono detti metodi **impliciti** quelli che richiedono di risolvere ad ogni passo un sistema di equazioni per ricavare y_{n+1} .

La Φ , detta **funzione incrementale**, dipende ovviamente dalla funzione f a membro destro dell'equazione differenziale (2.1) e, pertanto, è un **funzionale** del tipo

$$\Phi : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m \times (0, \bar{h}) \times \mathcal{F}([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

dove $\mathcal{F}([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ è un opportuno spazio di funzioni e $\bar{h} > 0$ è il massimo passo per il quale il metodo risulta ben definito (eventualmente $\bar{h} = +\infty$).

Introduciamo ora dei concetti e dei risultati, alcuni dei quali sono già stati parzialmente visti con il metodo di Eulero.

Definizione 1 *L'errore locale di troncamento*

$$\sigma(t, h) = y(t+h) - \underbrace{[y(t) + h\Phi(t, y(t), h, f)]}_{\text{metodo}}$$

è l'errore dovuto all'impiego del valore approssimato fornito dal metodo, applicato idealmente con passo h ad un valore della soluzione esatta $y(t)$.

Si noti che $\sigma(t, h)$ dipende anche da f , ma omettiamo di scriverlo esplicitamente per non appesantire la notazione.

E' utile considerare anche la seguente variante di errore locale.

Definizione 2 *L'errore locale di discretizzazione è la quantità*

$$d(t, h) = \frac{\sigma(t, h)}{h}.$$

Si ha che

$$d(t, h) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t, y(t), h, f),$$

da cui risulta ovvio il nome di funzione incrementale dato alla Φ .

Definizione 3 *Un metodo si dice **consistente** con l'equazione differenziale (2.1) in $[t_0, t_f]$ se risulta*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} D(h) = 0,$$

dove

$$D(h) = \max_{t_0 \leq t \leq t_f} |d(t, h)|.$$

Definizione 4 *Un metodo si dice **consistente di ordine p** in $[t_0, t_f]$ se, sotto l'ipotesi che sia $f \in C^p([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, risulta*

$$D(h) = O(h^p).$$

In precedenza abbiamo visto che il metodo di Eulero è consistente di ordine 1 (ovviamente sotto l'ipotesi che $f \in C^1([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$).

Definizione 5 *Considerata una griglia di punti $\Delta = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f\}$ in $[t_0, t_f]$, diremo **errore globale** in t_n la quantità*

$$e_n = y(t_n) - y_n.$$

Definizione 6 *Un metodo si dice **convergente** in $[t_0, t_f]$ se, posto $h = \max_{1 \leq n \leq N} h_n$, si ha che*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{1 \leq n \leq N} |e_n| = 0.$$

Definizione 7 *Un metodo si dice **convergente di ordine p** in $[t_0, t_f]$ se, sotto l'ipotesi che sia $f \in C^p([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, risulta*

$$\max_{1 \leq n \leq N} |e_n| = O(h^p).$$

In precedenza abbiamo anche visto che, per il metodo di Eulero, la consistenza garantisce la convergenza. Questo fatto sussiste nel caso generale sotto un'ipotesi aggiuntiva di lipschitzianità per la funzione incrementale (che nel caso del metodo di Eulero è assicurata dalla lipschitzianità della funzione f).

Teorema 1 (di convergenza) *Se un metodo è consistente di ordine p in $[t_0, t_f]$ e se la funzione incrementale $\Phi(t, y, h, f)$ è lipschitziana di costante Q rispetto alla variabile y per ogni $t \in [t_0, t_f]$ e per ogni $h \leq h_0$ con $h_0 > 0$ opportuno, allora il metodo è convergente di ordine p in $[t_0, t_f]$.*

Dimostrazione

Consideriamo griglie tali che $h \leq h_0$ (non è restrittivo) e sottraiamo membro a membro le due uguaglianze

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h_{n+1}\Phi(t_n, y(t_n), h_{n+1}, f) + h_{n+1}d(t_n, h_{n+1}) \\ y_{n+1} &= y_n + h_{n+1}\Phi(t_n, y_n, h_{n+1}, f) \end{aligned}$$

Tenendo conto della lipschitzianità della Φ e del fatto che il metodo è consistente di ordine p , possiamo concludere che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|e_{n+1}| \leq (1 + h_{n+1}Q)|e_n| + Ch_{n+1}h^p.$$

Essendo $1 + h_{n+1}Q \leq e^{h_{n+1}Q}$, otteniamo poi

$$|e_{n+1}| \leq e^{h_{n+1}Q}|e_n| + Ch_{n+1}h^p.$$

Tenendo poi conto che $e_0 = 0$ e che $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, applicando ricorsivamente la formula dall'inizio abbiamo che

$$|e_n| \leq C \left(\sum_{k=1}^n e^{Q(t_n - t_k)} h_k \right) h^p$$

La sommatoria a membro destro è una formula di quadratura dei rettangoli per la funzione $e^{Q(t_n - t)}$ nell'intervallo $[t_0, t_n]$ e, come si può vedere facilmente, risulta una stima per difetto del suo integrale. Pertanto si conclude che per ogni $n = 1, \dots, N$ vale la maggiorazione uniforme

$$|e_n| \leq C \frac{e^{Q(t_n - t_0)} - 1}{Q} h^p \leq C \frac{e^{Q(t_f - t_0)} - 1}{Q} h^p$$

e, quindi, che il metodo è convergente di ordine p in $[t_0, t_f]$. CVD

Osservazione 1 *Come risulta chiaro già dall'esempio del metodo di Eulero, in cui si ha $Q = L$, la costante di Lipschitz di Φ dipende sempre dalla funzione f a membro destro di (2.1).*

2.3.1 Metodo di Eulero implicito

La funzione incrementale del metodo di Eulero implicito è

$$\Phi(t, y, h, f) = f(t + h, z),$$

dove z è la soluzione di

$$z = y + hf(t + h, z).$$

Verifichiamone la lipschitzianità. Sia dunque \bar{z} tale che

$$\bar{z} = \bar{y} + hf(t + h, \bar{z}).$$

Allora si ha

$$|z - \bar{z}| \leq |y - \bar{y}| + hL |z - \bar{z}|$$

e, quindi, se $h \leq h_0$ con $h_0 > 0$ tale che $h_0L < 1$, si ha pure

$$|z - \bar{z}| \leq \frac{1}{1 - h_0L} |y - \bar{y}|,$$

da cui segue

$$|\Phi(t, y, h, f) - \Phi(t, \bar{y}, h, f)| = |f(t + h, z) - f(t + h, \bar{z})| \leq \frac{L}{1 - h_0L} |y - \bar{y}|.$$

Pertanto la costante di Lipschitz è $Q = \frac{L}{1 - h_0L}$.

Per quanto riguarda l'ordine di consistenza del metodo, osserviamo che

$$\sigma(t, h) = y(t + h) - y(t) - hf(t + h, z),$$

dove z è la soluzione di

$$z = y(t) + hf(t + h, z).$$

Pertanto, se $f \in C^1([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, essendo $z - y(t) = O(h)$, si ha

$$f(t + h, z) = f(t, y(t)) + O(h) = y'(t) + O(h)$$

e, quindi,

$$\sigma(t, h) = y(t + h) - y(t) - hy'(t) + O(h^2).$$

Da quanto visto nella Sezione 2.1, segue che

$$\sigma(t, h) = O(h^2)$$

e, quindi, il metodo è consistente di ordine 1.

Notiamo che finora si è sempre implicitamente ammesso che l'equazione $z = y(t) + hf(t + h, z)$ ammetta un'unica soluzione. Ciò non è vero in generale, ma lo è sicuramente nel caso da noi considerato in cui $hL < 1$. Infatti, in tale caso la funzione $g(z) = y(t) + hf(t + h, z)$ è una contrazione di \mathbb{R}^m .

Tutti i metodi che abbiamo elencato nella Sezione 2.2 hanno la funzione incrementale Φ lipschitziana. Rimane da vedere se sono consistenti ed, eventualmente, determinare i parametri della formula per ottenere la consistenza o, meglio ancora, un ordine di consistenza il più alto possibile.

2.3.2 Metodi Runge-Kutta espliciti a 2 livelli

Come accade per tutti i metodi Runge-Kutta espliciti, la lipschitzianità della funzione incrementale dei metodi introdotti nella Sezione 2.2.3 segue facilmente dalla lipschitzianità della funzione f a membro destro di (2.1).

Vedremo invece ora come si possano determinare i parametri affinché essi risultino consistenti di ordine 2.

Per essi l'errore locale di troncamento ha la seguente espressione:

$$\sigma(t, h) = y(t + h) - [y(t) + hb_1f(t, y(t)) + hb_2f(t + ch, y(t) + haf(t, y(t)))].$$

Supponendo che $f \in C^2([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ e sviluppando $y(t + h)$ nel punto t , otteniamo

$$y(t + h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + O(h^3)$$

e, poichè $y'(t) = f(t, y(t))$, abbiamo anche che

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t)) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t)) \right) + O(h^3).$$

Sviluppiamo ora $f(t + ch, y(t) + haf(t, y(t)))$ nel punto $(t, y(t))$ per ottenere

$$f(t, y(t)) + ch \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + haf(t, y(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) + O(h^2).$$

Sostituendo infine nella prima formula entrambi gli sviluppi ed omettendo per semplicità di notazione la dipendenza da $(t, y(t))$, abbiamo

$$\sigma(t, h) = h(1 - b_1 - b_2)f + h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - b_2c \right) \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} - b_2a \right) \frac{\partial f}{\partial y} f \right] + O(h^3).$$

Imponendo pertanto le condizioni

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2c = \frac{1}{2} \\ b_2a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

nella precedente relazione rimane

$$\sigma(t, h) = O(h^3)$$

e, quindi, per quanto riguarda l'errore locale di discretizzazione,

$$d(t, h) = O(h^2),$$

come si voleva.

In particolare, la scelta $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ e $c = a = 1$ fornisce il metodo di Heun, già visto nella Sezione 2.2.2.

Un'altra possibile scelta è $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ e $c = a = \frac{1}{2}$, che determina il **metodo di Eulero generalizzato**

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} f \left(t_n + \frac{1}{2}h_{n+1}, y_n + \frac{1}{2}h_{n+1}f(t_n, y_n) \right)$$

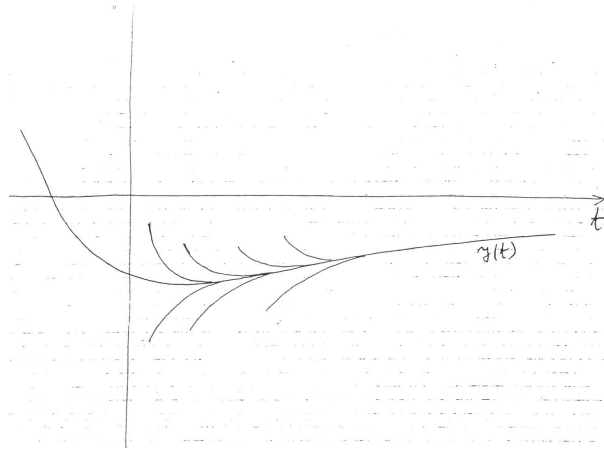


Figura 2.5: Esempio scalare di problema stiff.

2.4 Stiffness e stabilità

Si è visto che esistono sia metodi Runge-Kutta espliciti che metodi Runge-Kutta impliciti e che, a parità di numero di livelli s , i primi sono computazionalmente più costosi (vedasi la Sezione 2.2.4).

Un motivo che induce a considerare i metodi impliciti è dato dalla possibilità di ottenere un ordine di accuratezza più elevato a parità di numero di livelli. Un altro motivo, ancora più importante e che esamineremo in dettaglio tra breve, è quello di garantire migliori proprietà di **stabilità**.

Al fine di introdurre questa problematica, poniamo la nostra attenzione sui cosiddetti sistemi differenziali **stiff**.

L'essenza della **stiffness** (che significa rigidità) è la seguente: la soluzione che deve essere approssimata varia lentamente e, nel contempo, esistono alcune sue perturbazioni che si smorzano rapidamente su di essa.

Il grafico in Figura 2.5 illustra la situazione nel caso scalare, in cui tutte le curve integrali che escono da punti vicini al grafico della soluzione approssimanda convergono rapidamente verso di essa.

In altri termini, si può dire che c'è **stiffness** quando c'è “troppa” stabilità di una soluzione lentamente variabile.

Prima di analizzare con un esempio le difficoltà computazionali che possono sorgere nel risolvere un sistema stiff, diamo una caratterizzazione analitica di tale tipo di problemi.

Definizione 8 Considerato un prodotto scalare (\cdot, \cdot) in \mathbb{R}^m e la relativa norma $|\cdot|$ da esso dedotta, diremo **costante di Lipschitz destra** di una funzione

$$f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

l'estremo inferiore dei numeri reali M per cui si ha che

$$(f(t, y) - f(t, z), y - z) \leq M |y - z|^2 \quad \forall t, y, z.$$

Dato che noi supponiamo sempre la lipschitzianità di f in senso classico, ne segue che, detta L la costante di Lipschitz riferita alla medesima norma, la costante di Lipschitz destra M esiste sempre e si ha

$$|M| \leq L.$$

Infatti, essendo

$$(f(t, y) - f(t, z), y - z) \leq |f(t, y) - f(t, z)| \cdot |y - z| \leq L |y - z|^2,$$

segue che esiste M costante di Lipschitz destra $\leq L$.

Se poi è $M < 0$, si ha pure

$$0 \geq M |y - z|^2 \geq (f(t, y) - f(t, z), y - z) = -|f(t, y) - f(t, z), y - z| \geq -L |y - z|^2$$

e, quindi, $-M \leq L$.

Si dimostra facilmente che, considerato il medesimo sistema differenziale con due dati iniziali diversi y_0 e z_0 , e cioè

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

si ha

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{M(t-t_0)} |y_0 - z_0| \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (2.2)$$

Questo risultato è un raffinamento del teorema di dipendenza continua dai dati iniziali visto nel Capitolo 1 che coinvolge la costante di Lipschitz classica L . In effetti, mentre risulta sempre $L \geq 0$, può benissimo essere $M < 0$. In questo caso la (2.2) indica un avvicinamento reciproco delle varie traiettorie uscenti da dati iniziali diversi al crescere di t . Notiamo che una tale informazione non è ottenibile dal già noto teorema di dipendenza continua. Fatte queste premesse, possiamo affermare che c'è stiffness quando risulta

$$M \leq 0 \quad \text{e} \quad L \gg 0,$$

ossia quando il sistema è di tipo **dissipativo** e la costante di Lipschitz classica L è “molto grande”, dove il concetto di molto grande è relativo all'andamento della soluzione che si deve approssimare e non può essere quantificato in maniera precisa.

Per illustrare le difficoltà che si possono incontrare approssimando la soluzione di un sistema stiff, consideriamo il metodo di Eulero esplicito ed applichiamo al problema scalare della Figura 2.5. La situazione che ne scaturisce si può rappresentare graficamente come in Figura 2.6. Si ottiene un'approssimazione del tutto inaccettabile. Si noti anche che, pur utilizzando lo stesso passo, se il metodo fosse applicato sempre a punti della traiettoria approssimanda (che varia lentamente), si otterrebbero delle buone approssimazioni. In effetti il guaio nasce dal fatto che già dopo un solo passo ci si allontana (anche se di poco) dalla traiettoria da seguire e si va a finire su altre traiettorie che hanno un andamento molto ripido. Quindi - è proprio il caso di dirlo - il metodo parte per la tangente!

L'analisi di questa semplice situazione ci fa capire che, in caso di stiffness, i problemi sorgono in maggior misura dalla forte stabilità (della soluzione approssimanda) che non dal bisogno di accuratezza.

Volendo neutralizzare l'effetto dovuto alla stiffness, si dovrebbe usare un passo esageratamente piccolo. Questa situazione si presenta in generale quando si usano metodi espliciti.

I metodi adatti ai problemi stiff sono invece i metodi impliciti. Sempre a scopo illustrativo, applichiamo invece ora il metodo di Eulero implicito al problema della Figura 2.5. La situazione che ne scaturisce si può rappresentare graficamente come in Figura 2.7.

La situazione è chiaramente molto migliorata. Anzi, è del tutto soddisfacente. La spiegazione sta nel fatto che, per dirla in termini figurati, il metodo di

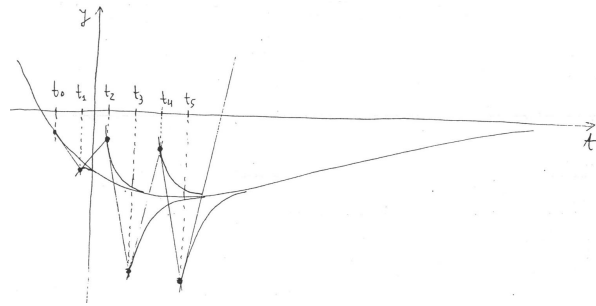


Figura 2.6: Metodo di Eulero esplicito applicato ad un problema stiff.

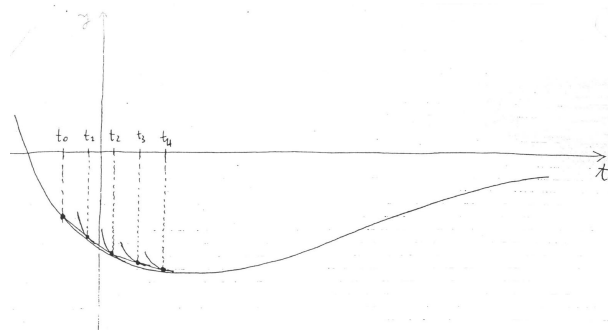


Figura 2.7: Metodo di Eulero implicito applicato ad un problema stiff.

Eulero implicito “arriva” lungo la tangente, al contrario di quello esplicito che invece “parte” lungo la tangente.

In generale i metodi impliciti, anche di ordine superiore, hanno le potenzialità necessarie per affrontare adeguatamente le difficoltà tipiche della stiffness.