CORSO DI METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA MECCANICA

1. ALCUNE NOZIONI E STRUMENTI PRELIMINARI

1-RICHIAMI SUGLI SPAZI VETTORIALI

Ricordiamo che un ***vettore*** in R^n (o C^n) e' una n-upla ordinata di numeri reali (o complessi) che rappresenteremo abitualmente in forma di ***vettore colonna*** o, equivalentemente, come il ***trasposto*** di un ***vettore riga***

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

Assegnata sui vettori una operazione di somma e di prodotto per scalari

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^T \quad \text{e} \quad ax := (ax_1, \ldots, ax_n)^T \quad a \in R^n \quad (\text{o } C^n),$$

un sottoinsieme $\mathcal{V}$ di vettori di R^n (o C^n) assume la struttura di ***Spazio Vettoriale*** (o ***Spazio Lineare***) su R (o su C) se soddisfa le seguenti proprieta' per ogni x,y,z di $\mathcal{V}$ e per ogni scalare a,b di R (o C).

1. $x + y \in \mathcal{V}$ e $ax \in \mathcal{V}$, cioe' $\mathcal{V}$ e' chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto.
2. $x+y=y+x$.
3. $x+(y+z)=(x+y)+z$.
4. C'e' un unico vettore $0 \in \mathcal{V}$, tale che $x+0=x$.
5. Per ogni x, c'e' un unico vettore $-x$ tale che $-x+x=0$.
6. $1x=x$ (1 e' l'elemento unitario di R^n (o C^n) cioe' tale che $1a=a \ \forall a \in a\ R$ (o C)).
7. $a(bx)=(ab)x$.
8. $a(x+y)=ax+ay$.
9. $(a+b)x=ax+bx$.

In particolare, dati ad arbitrio m vettori $\{x^1, \ldots, x^m\}$ non nulli, l'insieme $span(x^1,\ldots,x^m)$, da essi generato (cioe' l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari, inclusa naturalmente, la combinazione nulla) e' uno spazio vettoriale. I vettori $\{x^1, \ldots, x^m\}$ sono ***linearmente indipendenti*** se nessuno di essi puo' essere generato dai rimanenti o, equivalentemente, solo la loro combinazione lineare nulla produce il vettore nullo. Se, al contrario, uno dei vettori di $\{x^1, \ldots, x^m\}$ puo' essere rappresentato da una combinazione lineare degli altri, allora si dice che essi sono ***linearmente dipendenti***. Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che generano lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ e' detto ***dimensione*** dello spazio, *dim*($\mathcal{V}$), ed ogni insieme di tali vettori e' detta ***base*** dello spazio stesso. Se, per esempio, $\mathcal{V}$ = $span(x^1,\ldots,x^m)$ e $\{x^{i1}, \ldots, x^{ik}\}$ sono $k(<m)$ vettori linearmente indipendenti estratti dall'insieme $\{x^1, \ldots, x^m\}$, allora essi costituiscono una possibile base per $\mathcal{V}$ ed inoltre *dim*($\mathcal{V}$)=k.

Lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ e' detto ***spazio vettoriale normato*** se e' dotato di una norma, cioe' di una applicazione di $\mathcal{V}$ in R, a valori non negativi, che gode delle seguenti proprietà'

1. $\|x\| \geq 0$, e $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$.
2. $\|ax\|=|a|\ \|x\|$.
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (proprieta' triangolare)

La norma di un vettore altro non e' che la sua *lunghezza*. Inoltre, attraverso la norma, si definisce la ***distanza*** tra due vettori x e y

$$dist(x,y)=\|x-y\|$$

La norma piu' comunemente usata in R^n e' la norma Euclidea, indicata usualmente con $\|x\|_2$ e definita da

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \ .$$

Mentre e' banale verificare le prime 2 proprieta' della norma, la proprieta' triangolare potra' essere facilmente verificata dopo aver introdotto il prodotto scalare e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz che vedremo tra poco.

Rispetto alla norma Euclidea, si puo' definire la sfera unitaria come l'insieme

$$S_2 = \{x \in R^n : \|x\|_2 = 1\}$$

costituito dall'insieme di punti di R^n che distano 1 dall'origine (cioe' dal vettore nullo). Tale insieme ha la forma che nel linguaggio comune si indica, appunto, col termine "sfera".

Ogni funzione $\|x\|_i$ a valori non negativi definita sui vettori di R^n e soddisfacente le 3 proprieta' sopra indicate puo' essere assunta come norma. Cambiando la norma, cambia il valore della distanza tra due vettori e, di conseguenza, la forma della sfera definita ancora come l'insieme $S_i = \{x \in R^n : \| x \|_i = 1\}$

Tra gli infiniti modi di definire una norma in R^n , sono di particolare interesse, oltre alla norma Euclidea, le seguenti due norme:

$$\| x \|_1 := | x_1 | + ... + | x_n | \quad \text{e} \quad \| x \|_\infty := \max_i | x_i |$$

Il lettore disegni, in R^2, le corrispondenti sfere S_1 e S_∞ confrontandole tra loro e con la sfera Euclidea S_2.

Per ogni norma, si puo' ovviamente definire la sfera di centro il punto x_0 e di raggio r, come l'insieme

$$S_i(x_0, r) = \{x \in R^n : \| x - x_0 \|_i = r\}$$

In R^n tutte le norme sono ***equivalenti***, cioe': assegnate due norme $\| \; \|_I$ e $\| \; \|_{II}$ esistono due costanti $m, M > 0$ tali che

$$m\|x\|_I \leq \|x\|_{II} \leq M\|x\|_I$$

per ogni $x \in R^n$.

Questa proprieta' e' fondamentale perche' consente di valutare la convergenza di un procedimento di approssimazione indipendentemente dalla norma usata. Infatti se una successione di vettori, per esempio una successione di errori $\| x_n - x^* \|_I$, tende a zero, allora, evidentemente, anche la successione $\| x_n - x^* \|_{II}$ tende a zero.

Un'altra classe importante di spazi vettorali e' costituito dall'insieme $C^k[a,b]$ delle funzioni definite sull'intervallo reale $[a,b]$ ed a valori in R , derivabili k volte con derivata k-esima continua. L'intervallo $[a,b]$, puo' anche essere illimitato e l'indice k di derivazione puo' essere infinito: $C^\infty[a,b]$. In tali spazi e' definita la somma ed il prodotto esterno

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (af)(x) := af(x).$$

Il lettore verifichi che tale insieme e' uno spazio vettoriale.

In generale, tali spazi non possono essere generati da un sottoinsieme finito di elementi e quindi la loro dimensione e' infinita. Ci sono pero' dei sottospazi che ammettono un insieme finito di generatori e quindi una base finita. Per esempio, l'insieme Π_n dei ***polinomi***

algebrici di grado $\leq n$, con la base canonica $\{1, x, \ldots, x^n\}$ e' un sottospazio lineare proprio di $C^\infty[a,b]$ avente dimensione $n+1$.

Anche gli spazi di funzioni possono essere dotati di norme; tra di esse sono di particolare interesse le 3 seguenti norme (che evocano le 3 norme precedentemente viste in R^n)

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx \quad ,$$

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx} \quad \text{detta norma di Hilbert,}$$

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad \text{detta norma di Lagrange, o norma uniforme.}$$

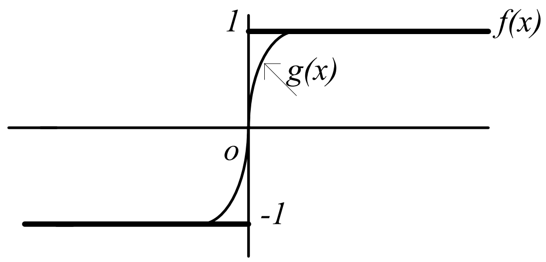
La verifica che $\| \ \|_1$ e $\| \ \|_\infty$ soddisfino le 3 proprieta' richieste per le norme, e' relativamente facile, mentre la proprieta' triangolare e' piu' complicata da verificare per la norma $\| \ \|_2$.

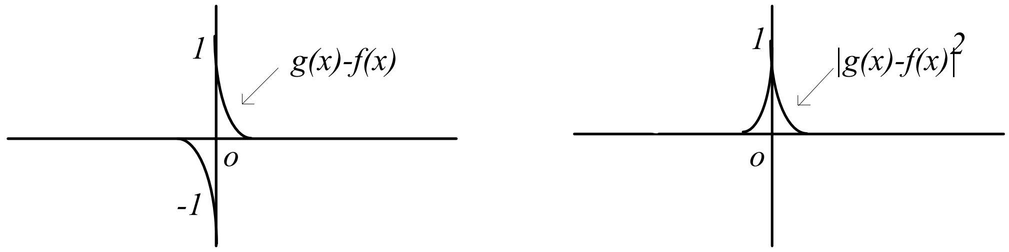
Il concetto di norma (o di lunghezza) in uno spazio di funzioni e' un concetto apparentemente piu' astratto rispetto al caso di R^n, ma poiche' induce una distanza tra due funzioni f e g dello spazio, $dist(f,g)=||f-g||$, essa ci consente di "misurare" la loro differenza, cioe' l'errore con cui l'una approssima l'altra. Le 3 nome considerate rappresentano, rispettivamente, il valore medio di $|f|$ moltiplicato per la lunghezza dell'intervallo $|b-a|$, la radice quadrata del valore quadratico medio per $|b-a|$, ed infine il valore massimo di f in $[a,b]$. Rispetto all'errore di approssimazione, le prime due forniscono ***l'errore medio*** e ***l'errore quadratico medio*** mentre l'ultima fornisce ***l'errore uniforme***.

Per esempio il polinomio $p(x)=1+x$ approssima la funzione e^x nell'intervallo [0,1] con errore medio $\|e^x - p(x)\|_1 = \int_0^1 (e^x - x - 1)dx = e - 2.5 \approx 0.217$

ed errore uniforme $\|e^x - p(x)\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - x - 1| = e - 2 \approx 0.717$.

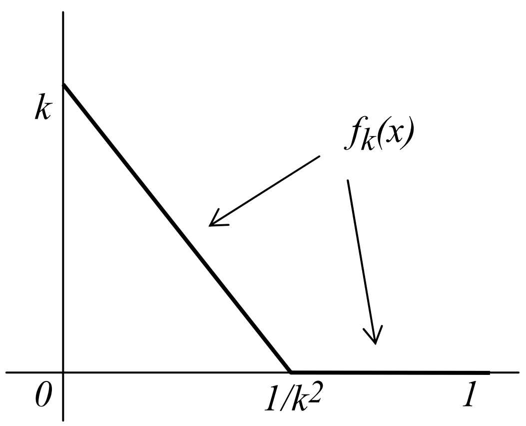
Le norme $\| \ \|_1$ e $\| \ \|_2$ sono particolarmente adatte a misurare la distanza tra funzioni appartenenti a spazi vettoriali piu' generali. Per esempio consideriamo lo spazio delle funzioni limitate che ammettono un numero finito di discontinuita'. Nelle seguenti figure si vede che la distanza tra la funzione $g(x)$ e la funzione (discontinua) $f(x)$ è 1 in norma uniforme mentre è molto piccola in norma 1 e 2.





Si osservi inoltre che, nell'esempio proposto, nessuna funzione continua può avere distanza uniforme da $f(x)$ minore di 1. In particolare la funzione nulla approssima la $f(x)$ con lo stesso errore uniforme della $g(x)$, il che non è ragionevole. Ciò rende la norma uniforme inappropriata all'esempio considerato, mentre le altre due norme consentono delle stime più sensate.

La proprieta' di equivalenza delle norme non si trasferisce agli spazi di dimensione infinita. Come esempio si consideri la successione di funzioni $f_k(x)$ definite in figura



$$f_k(x) = \begin{cases} -k^3\left(x - \dfrac{1}{k^2}\right) & 0 \le x \le \dfrac{1}{k^2} \\ 0 & \dfrac{1}{k^2} \le x \le 1 \end{cases}$$

le cui norme sono date da

$$\|f_k\|_1 = \int_0^1 |f_k(x)|\, dx = \int_0^{\frac{1}{k^2}} -k^3\left(x - \frac{1}{k^2}\right) dx = \frac{1}{2k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \quad ,$$

$$\|f_k\|_2 := \sqrt{\int_0^1 f_k(x)^2\,dx} = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{k^2}} \left(-k^3(x-\frac{1}{k^2})\right)^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\|f_k\|_\infty = \max_{0\le x\le 1}|f_k(x)| = k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty\,.$$

Il lettore dimostri che le 3 norme non possono essere equivalenti.

Un altro esempio importante di Spazio Vettoriale e' costituito dall'insieme $R^{m\times n}$ delle matrici reali, di m righe ed n colonne, con l'usuale operazione di somma e di prodotto per scalari. E' banale osservare che tale insieme costituisce uno spazio vettoriale. Anche in questo caso e' possibile definire delle norme sullo spazio vettoriale. Alcuni richiami sulle matrici, sugli autovalori e sulle possibili norme di cui possono essere dotate verra' fatto, con un maggior grado di approfondimento, in un capitolo successivo.

In molti spazi vettoriali $\mathcal{V}$ e' interessante considerare un ***prodotto scalare***, cioe' una applicazione $<x,y>$ di $\mathcal{V}\times\mathcal{V} \to R$ che goda delle seguenti proprieta' (qui ci limitiamo al caso che $\mathcal{V}$ sia uno spazio lineare su R):

1. $<x,x> \ge 0$, e $<x,x>=0 \Leftrightarrow x=0.$
2. $<x,y>=<y,x>$
3. $<x,ay+bz>=a<x,y>+ b<x,z>$

Il prodotto scalare ci consente di introdurre il seguente concetto di ortogonalita'. Due vettori si dicono ***ortogonali*** ($x\perp y$) se $<x,y>=0$. Inoltre, ad ogni prodotto scalare si puo' associare, in modo canonico, la norma

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>}$$

Si vede facilmente che, in R^n, la funzione

$$<x,y> := x_1y_1 + \ldots + x_nx_n$$

gode delle 3 proprieta' richieste del prodotto scalare e inoltre la norma associata e' proprio la norma Euclidea $\|\ \|_2$.

In modo analogo, gli spazi lineari di funzioni che abbiamo considerato sono dotati del prodotto scalare

$$< f,g > = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

al quale si associa la norma di Hilbert

$$\|f\|_2 = \sqrt{< f,f >} = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$$

In ogni spazio lineare dotato di prodotto scalare vale la ***disuguaglianza di Cauchy-Schwarz***:

$$|< x,y >| \leq \sqrt{< x,x >}\sqrt{< y,y >}$$

attraverso la quale si puo' ora dimostrare, in modo relativamente semplice, la proprieta' triangolare della norma Euclidea e della norma di Hilbert.

Va precisato, a scanso di equivoci, che non tutte le norme possono essere dedotte da prodotti scalari. In particolare, le altre norme fin qui incontrate non derivano da prodotti scalari e quindi i relativi spazi lineari normati non dispongono di una nozione di ortogonalita'. Negli spazi lineari dotati di prodotto scalare, il ***problema della miglior approssimazione*** in sottospazi di dimensione finita trova una soluzione quasi banale. Vale infatti il seguente teorema.

Sia dato uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ dotato di prodotto scalare ed un sottospazio proprio $\mathcal{V}_m$ $= span(u^1,...,u^m)$, di dimensione finita m. Per ogni elemento x di $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_m$, esiste un elemento $u^* \in \mathcal{V}_m$ che minimizza la distanza da x nella norma dedotta dal prodotto scalare, cioe' tale che:

$$\|x - u^*\|_2 \leq \|x - u\|_2 \; \forall u \in \mathcal{V}_m$$

Il punto u^*, detto ***elemento di miglior approssimazione***, e' dato dalla ***proiezione ortogonale*** di x su $\mathcal{V}_m$ ottenuta imponendo le condizioni di ortogonalita' dell'errore x-u^* rispetto a tutti gli elementi della base di $\mathcal{V}_m$

$$<x-u^*, u^i> = 0 \text{ per } i=1,\ldots m. \quad \textit{(Equazione di Gram-Schmidt).}$$

Il teorema e' molto potente poiche e' enunciato in maniera astratta, cioe' senza precisare quali sono gli spazi in gioco che verranno fissati di volta in volta a seconda del problema che vorremo risolvere, ed inoltre fornisce lo strumento per trovare la soluzione. Per esempio, dato un piano ed un punto esterno al piano, possiamo trovare, sul piano stesso, il punto di minima distanza dal punto assegnato. Oppure, data una funzione continua, possiamo trovare, per ogni n fissato, il polinomio di miglior approssimazione tra tutti quelli di grado $\leq n$.

Esercizio. Assegnato il piano $\mathscr{P}$ generato dai vettori (1,0,0) e (0,1,1), trovare il punto del piano $\mathscr{P}$ di minima distanza euclidea dal punto (0,0,1).

Esercizio. Si trovi il polinomio di grado 1 di miglior approssimazione, in norma di Hilbert, per la funzione $sen(x)$ nell'intervallo $[0,\pi]$.

La dimostrazione del teorema ed un approfondimento nel caso degli spazi R^m e $C^k[a,b]$ verra' fornita in un successivo capitolo.

2-RICHIAMI DI "CALCULUS"

<u>Teorema di Weierstrass</u>: Ogni funzione continua f: $S\rightarrow R$ definita sull'insieme chiuso e limitato S, ammette massimo e minimo.

<u>Teorema di connessione</u>: Sia $f\in C°[a,b]$. Per ogni c: $f(a)<c<f(b)$ esiste un punto $\xi\in (a,b)$, tale che $f(\xi)=c$.

<u>Teorema di monotonia integrale</u>. Siano f e $g \in C°[a,b]$ con $f(x)\leq g(x)$ per ogni $x\in [a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \;.$$

<u>Corollario</u>:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

<u>Teorema fondamentale del calcolo integrale</u>: Se $f \in C^1[a,b]$, allora per ogni $x\in [a,b]$ si ha

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$$

Regola di integrazione per parti. Siano f e $g \in C^1$ $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Teorema della media integrale. Siano f e $g \in C^1$ $[a,b]$ e $g(x) \geq 0$. Allora esiste un punto $\xi \in (a,b)$ tale che

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx\ .$$

Formula di Taylor. Sia $f \in C^{n+1}$ $[a,b]$ per qualche $n \geq 0$ e siano $c \neq x \in [a,b]$. Allora esiste un ξ : $a<\xi<b$ tale che

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2+\ \dots\ +\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)\ (x-c)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\ (x-c)^{n+1}$$

Si osservi che il polinomio

$$p_n(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2+\ \dots\ +\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)\ (x-c)^n$$

nel punto c ha le stesse derivate di f fino all'ordine n.

Formula d'interpolazione polinomiale. Sia $f \in C^{n+1}$ $[a,b]$ per qualche $n \geq 0$ e siano ($a=$) $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ($=b$), $n+1$ punti distinti di $[a,b]$. Allora per ogni $x \in [a,b]$ esiste un $\xi \in (a,b)$ per cui vale l'identita:

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ +f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\ (x-x_0)\dots\dots(x-x_n)$$

dove i termini $f[x_0,x_1,\dots,x_k]$, detti: ***differenze divise di ordine k***, sono definiti ricorsivamente da

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{f[x_1,\dots,x_k]-f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

essendo

$$f[x_i]=f(x_i)$$

la differenza di ordine 0.

Le differenze possono essere costruite facilmente con lo schema

$$
\begin{array}{lllll}
f(x_0) & & & & \\
f(x_1) & \searrow f[x_0, x_1] & & & \\
f(x_2) & \searrow f[x_1, x_2] & \searrow f[x_0, x_1, x_2] & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
f(x_n) & \searrow f[x_{n-1}, x_n] & \searrow \cdots & \cdots & \searrow f[x_0, x_1 \ldots, x_n].
\end{array}
$$

Il polinomio di grado n

$$p_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+ +f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

e’ detto ***polinomio di interpolazione della funzione f sui nodi*** $x_0, x_1, \ldots, x_n$,e soddisfa le condizioni di interpolazione:

$$p_n(x_i)=f(x_i) \quad i=0,1,\ldots,n$$

mentre il termine

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)\ldots\ldots(x-x_n)$$

e’ il ***resto (*** o ***errore)*** di interpolazione.