

EQUAZIONI DIFFERENZIALI 3

3. EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI:

Il metodo delle caratteristiche per l'equazione del trasporto

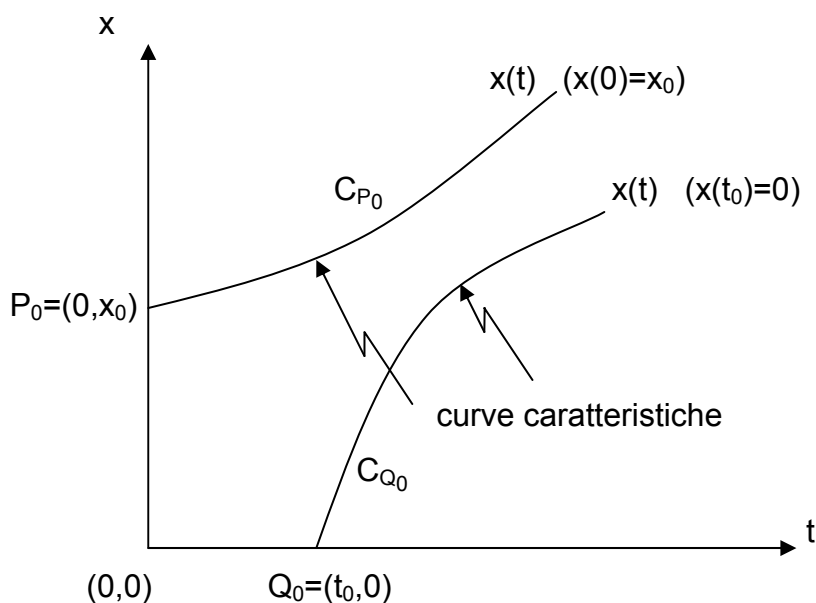
Consideriamo dapprima la seguente classe di equazioni differenziali lineari del primo ordine (equazione non diffusiva del trasporto):

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + v(t,x) \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = f(t,x) \quad t \geq 0, x \geq 0 \quad (3.1)$$

con le condizioni iniziali, per t e per x :

$$\begin{aligned} u(0,x) &= g(x) && \text{per } x \geq 0 \\ u(t,0) &= b(t) && \text{per } t \geq 0. \end{aligned}$$

Consideriamo un punto del bordo dove sono assegnate le condizioni iniziali, cioè un punto del tipo $P_0 = (0, x_0)$ oppure $Q_0 = (t_0, 0)$ con $t_0, x_0 \geq 0$, e immaginiamo di voler integrare la nostra equazione (3.1) lungo una curva C_{P_0} o C_{Q_0} (da determinare) del piano (t, x) , di equazioni parametriche $(t, x(t))$, che esce dal punto P_0 , per cui sarà $x(0) = x_0$, oppure da Q_0 per cui sarà $x(t_0) = 0$ rispettivamente.



Lungo tale curva, la soluzione $u(t,x(t))$ ammette la derivata totale

$$u'(t) = \frac{d}{dt}u(t, x(t)) = \frac{\partial}{\partial t}u(t, x(t)) + \frac{\partial}{\partial x}u(t, x(t))x'(t). \quad (3.2)$$

Per ogni $t_0 \geq 0$ e $x_0 \geq 0$ consideriamo la funzione $x(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale

$$x'(t) = v(t, x(t)) \quad (3.3)$$

con la condizione iniziale $x(t_0) = 0$, oppure $x(0) = x_0$. Si ottengono così delle curve, di coordinate parametriche $(t, x(t))$, dette curve **caratteristiche**, che escono dal punto P_0 o Q_0 e che indicheremo C_{P_0} o C_{Q_0} e rispettivamente. Osserviamo che lungo tali curve, il termine destro della (3.2) diventa

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x(t)) + \frac{\partial}{\partial x}u(t, x(t))v(t, x(t))$$

e quindi la (3.1) si riduce alle seguente *equazione differenziale ordinaria*

$$u'(t) = f(t, x(t)), \quad (3.4)$$

con la condizione iniziale $u(t_0, x(t_0)) = u(t_0, 0) = b(t_0)$, oppure $u(0, x(0)) = u(0, x_0) = g(x_0)$

a seconda di quale curva caratteristica stiamo percorrendo.

Quindi la soluzione di (3.1) lungo le curve caratteristiche e' data da

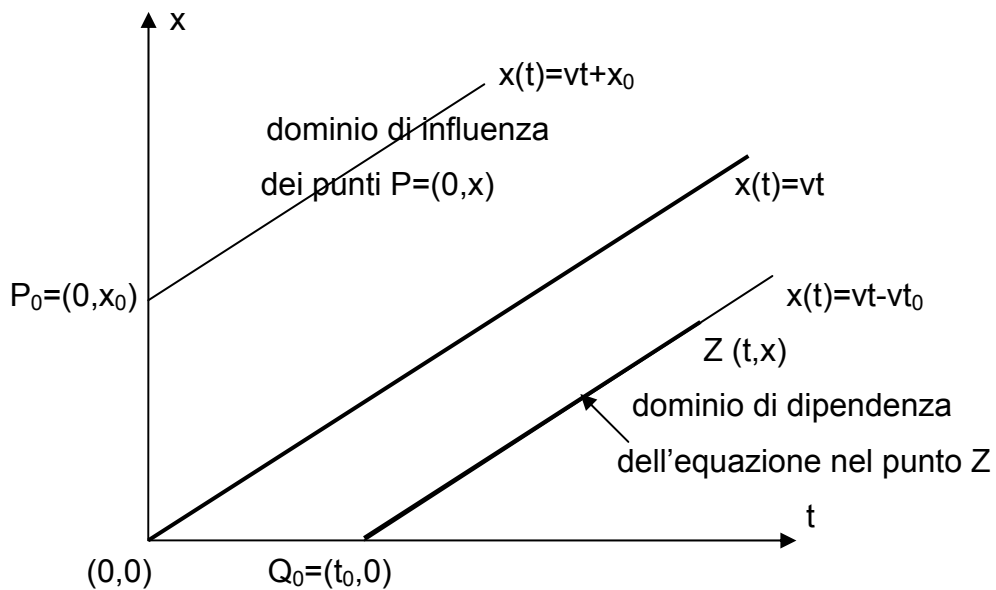
$$u(t, x(t)) = b(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{lungo } C_{P_0}$$

$$u(t, x(t)) = g(x_0) + \int_0^t f(s, x(s)) ds \quad \text{lungo } C_{Q_0}$$

In conclusione:

da ogni punto iniziale del dominio dell'equazione (3.1) esce una curva **caratteristica** C lungo la quale la soluzione e' data dalla soluzione del problema di Cauchy (3.4) con le opportune condizioni iniziali.

Supponiamo, come caso particolare, che $v(t, x)$ sia una funzione costante positiva: $v(t, x) = v > 0$. La caratteristica $x(t)$, soluzione della (3.3), e' data dalla semiretta $x(t) = vt + c$ dove la costante c e' determinato dalle condizioni iniziali $x(t_0) = 0$, oppure $x(0) = x_0$. Nel primo caso si ha $c = -vt_0$, nel secondo $c = x_0$.



Questa equazione ci consente di fare alcune osservazioni importanti sulla risolubilità e sul buon posizionamento del problema.

1) Innanzitutto osserviamo che per ogni punto Z , di coordinate (t, x) , $t \geq 0$, $x \geq 0$, passa una sola caratteristica ed il valore della soluzione $u(t, x)$ in Z dipende solo dai valori lungo la caratteristica fino al punto Z stesso. Tale insieme è detto **dominio di dipendenza** dell'equazione nel punto $Z=(t, x)$. Viceversa, il valore assegnato alla soluzione in un punto iniziale Z_0 (di tipo P_0 , oppure Q_0), influenza la soluzione solo lungo la corrispondente caratteristica che viene quindi indicata come il **dominio di influenza** del punto Z_0 .

2) Se avessi assegnato i valori iniziali solo sul semi-asse $t \geq 0$, allora l'equazione sarebbe risultata risolubile, con unicità di soluzione, solo per $x \leq vt$. Infatti il dominio di dipendenza nei punti sovrastanti la retta $x=vt$ non include il semi-asse $t \geq 0$ e quindi il problema non sarebbe ben posto in tale porzione di piano.

3) se fosse $v < 0$ allora il problema (3.1) sarebbe ancora mal posto perché le caratteristiche uscenti da un generico punto $(t, 0)$, incrocerebbero l'asse x in un punto $(0, x)$ dove la soluzione calcolata lungo la caratteristica assumerebbe un valore $u(0, x)$ non necessariamente uguale al valore iniziale $g(x)$ assegnato sull'asse x positivo. Il problema risulterebbe ben posto se fosse stato definito, per esempio, sul quadrante $t \leq 0$ e $x \geq 0$.

Consideriamo ora il caso in cui v ed f dipendano anche da u

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + v(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = f(t, x, u) \quad t \geq 0, x \geq 0 \quad (3.5)$$

In questo caso l'equazione è detta **semilineare** in quanto è lineare rispetto alle derivate parziali di ordine massimo (nel nostro caso: di ordine 1).

Con ragionamento simile al precedente, si cercherà ancora una caratteristica $x(t)$ tale che

$$x'(t) = v(t, x(t), u(t, x(t))) \quad (3.6)$$

con le opportune condizioni iniziali, per esempio $x(0) = x_0 = g(x_0)$. Lungo tale caratteristica, la soluzione $u(t, x(t))$ ammette, come funzione della sola t , il differenziale totale

$$u'(t) = \frac{d}{dt} u(t, x(t)) = \frac{\partial}{\partial t} u(t, x(t)) + \frac{\partial}{\partial x} u(t, x(t)) x'(t)$$

che per la (3.5) e (3.6) fornisce il sistema di due equazioni differenziali ordinarie

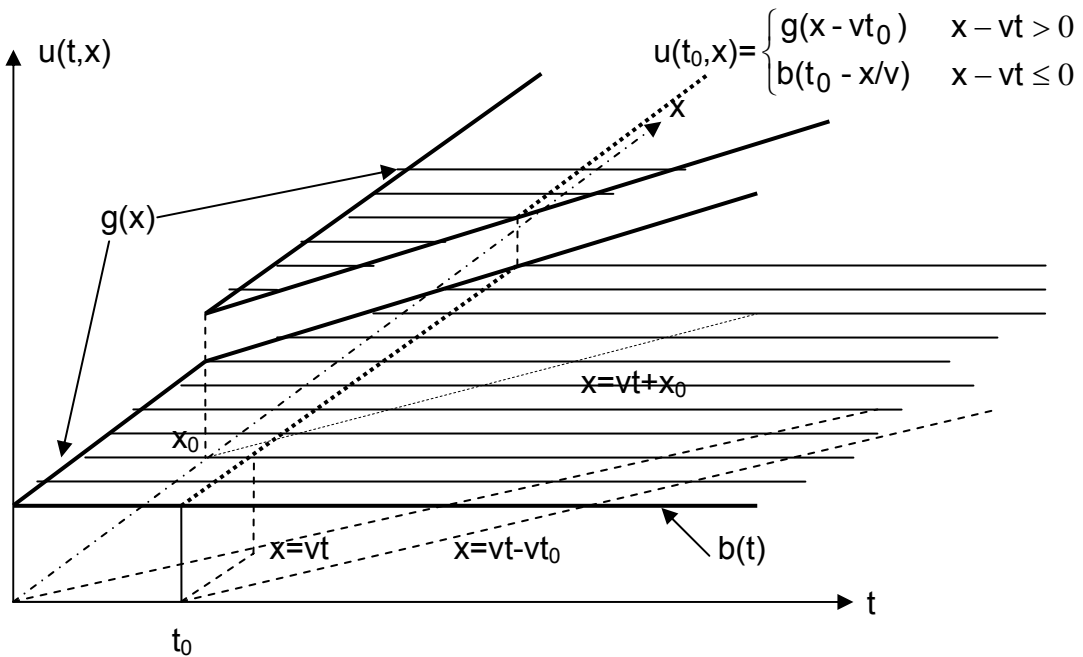
$$\begin{cases} u' = f(t, x, u), & u(0) = g(x_0) \\ x' = v(t, x, u), & x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Si vede facilmente che la soluzione di (3.6) con l'altra condizione iniziale $x(t_0) = 0$, porta allo stesso sistema con condizioni iniziali mutate anche per la variabile u ; precisamente

$$\begin{cases} u' = f(t, x, u), & u(t_0) = b(t_0) \\ x' = v(t, x, u), & x(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Integrando numericamente tali sistemi su una griglia temporale assegnata (o determinata da un integratore a passo variabile) otteniamo, lungo ogni caratteristica, una sequenza di terne (t_k, x_k, u_k) dove u_k è l'approssimazione di $u(t_k, x_k)$. In generale la soluzione sarà quindi calcolata su un insieme irregolare di punti del dominio dell'equazione.

Un caso particolarmente semplice si presenta quando $f(t,x,u)=0$. In tal caso, infatti, la (3.7) e (3.8) ci dicono che la soluzione u è costante lungo tutta la caratteristica con valore $g(x_0)$ o $b(t_0)$ rispettivamente. In particolare, una eventuale discontinuità nei dati iniziali si propaga lungo la corrispondente caratteristica con velocità v .



Al crescere di t , la funzione $u(t,x)$ si presenta sempre come una funzione a scalino con la discontinuità (che per $t=0$ si trova in x_0) che si muove, (cioè che viene “trasportata”) lungo l’asse x con velocità v .

L’equazione di Burger.

Si integri numericamente, col metodo delle caratteristiche, la seguente **equazione di Burger**,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + u \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = 0 \quad t \geq 0, \quad -1 \leq x \leq 1$$

con le condizioni iniziali $u(0, x) = \text{sen}(x)$.

Metodi alle differenze

Metodi alle differenze per l'equazione del trasporto.

Consideriamo l'equazione lineare del trasporto

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + v \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = f(t, x) \quad \text{per } 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq X, \quad \text{e } v \geq 0,$$

con valori iniziali

$$\begin{aligned} u(0, x) &= g(x), & x \geq 0 \\ u(t, 0) &= b(t), & t \geq 0 \end{aligned}$$

e integriamo con un metodo alle differenze su una griglia di punti (nk, jh) con $n \leq N, j \leq J$, dove $k = T/N$ e $h = X/J$ sono passi di discretizzazione temporale e spaziale rispettivamente. Indichiamo quindi con $u_{n,j}$ l'approssimazione di $u(nk, jh)$ nei punti della griglia.

Consideriamo dapprima lo **schema FB** (Forward, Backward) per il quale in ogni punto (nk, jh) la derivata u_t e la derivata u_x sono approssimate con le differenze in avanti e all'indietro rispettivamente. Si ottiene così lo schema alle differenze

$$\frac{u_{n+1,j} - u_{n,j}}{k} + v \frac{u_{n,j} - u_{n,j-1}}{h} = f(nk, jh) \quad u_{0,j} = g(jh), \quad u_{n,0} = b(nk) \quad j, n \geq 1$$

che rispetto all'equazione con le derivate discretizzate

$$\frac{u((n+1)k, jh) - u(nk, jh)}{k} + v \frac{u(nk, jh) - u(nk, (j-1)h)}{h} = f(nk, jh) + O(k, h)$$

fornisce la seguente relazione per l'errore

$$\frac{e_{n+1,j} - e_{n,j}}{k} + v \frac{e_{n,j} - e_{n,j-1}}{h} = O(k, h) \quad u_{0,j} = 0, \quad u_{n,0} = 0 \quad j, n \geq 1$$

Poiché l'errore è infinitesimo di ordine 1 diremo che lo schema è **consistente** con **ordine di consistenza** pari a 1.

Indicato con C il **numero di Courant**

$$C = \frac{vk}{h}$$

si ottiene la relazione ricorsiva

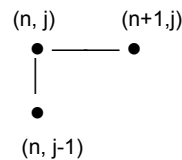
$$u_{n+1,j} = (1-C) u_{n,j} + C u_{n,j-1} + k f_{n,j} \quad f_{n,j} = f(nk, jh)$$

per la soluzione, e

$$e_{n+1,j} = (1-C) e_{n,j} + C e_{n,j-1} + kO(k,h)$$

per l'errore.

I nodi della griglia coinvolti ad ogni passo della relazione ricorsiva sono :



cosicche' il metodo puo' essere calcolato in modo esplicito rispetto all'indice temporale n.

In forma matriciale rispetto al vettore errore al tempo kn

$$E_n = (e_{n,1}, \dots, e_{n,J}) \quad \text{per ogni } J \text{ tale che } Jh=X$$

si ha

$$\begin{bmatrix} e_{n+1,1} \\ e_{n+1,2} \\ \vdots \\ e_{n+1,J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-C & & & \\ C & 1-C & & \\ & & \ddots & \\ & & & C & 1-C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{n,1} \\ e_{n,2} \\ \vdots \\ e_{n,J} \end{bmatrix} + kO(k,h)$$

cioe':

$$E_{n+1} = A E_n + kO(k,h).$$

Applicando ricorsivamente la formula, otteniamo :

$$E_{n+1} = A^{n+1} E_0 + (I + A + A^2 + \dots + A^n) kO(k,h)$$

Poiche' $E_0=0$, se $\|A\| \leq 1$ per ogni J, si ha

$$\|E_{n+1}\| \leq (n+1)k O(k,h) = T O(k,h), \quad \text{per ogni } n \leq N \quad \text{con } Nk=T$$

Si puo' quindi concludere che, per k ed h $\rightarrow 0$, il metodo converge con l'ordine di $O(k,h)$, su ogni sottoinsieme finito $[0, T] \times [0, X]$ del dominio purché sia $\|A\| \leq 1$ (condizione di **stabilita'**) in qualche norma. Abbiamo quindi dimostrato la seguente relazione, gia' incontrata trattando le equazioni ordinarie:

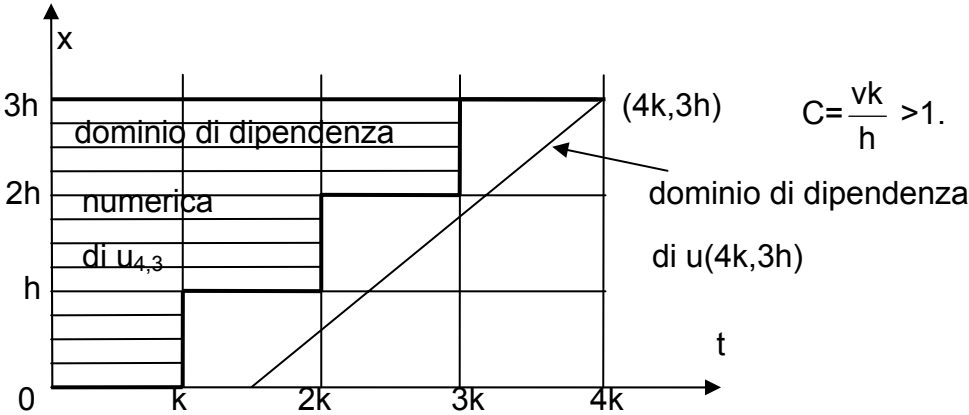
consistenza + stabilita' = convergenza

Nel nostro caso, la condizione $\|A\|_{\infty} \leq 1$ e' verificata per $C \leq 1$. Cio' impone un vincolo tra i passi d'integrazione spaziale e temporale

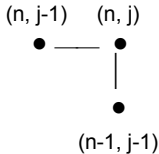
$$\frac{vk}{h} \leq 1$$

Per valori di v molto grandi, tale vincolo impone di procedere con un passo temporale k che potrebbe essere eccessivamente piccolo anche per modeste precisioni del risultato.

Una interpretazione della necessita' di tale vincolo e' illustrata nel seguente esempio dove $\frac{vk}{h} > 1$ e, di conseguenza, tutti i punti attraverso i quali si calcola la soluzione numerica $u_{4,3}$ (**dominio di dipendenza numerica**) sono esterni al dominio di dipendenza della soluzione esatta $u(4k,3h)$ (dato dalla caratteristica $x=vt-vt_0$ che passa per il punto $(4k,3h)$ per la quale $vdt=dx$).



Consideriamo ora il metodo dedotto dallo **schema BB** (Bakward,Backward)



$$\frac{u_{n,j} - u_{n-1,j}}{k} + v \frac{u_{n,j} - u_{n,j-1}}{h} = f(nk, jh) \quad u_{0,j} = g(hj), \quad u_{n,0} = b(nk) \quad j, n \geq 1$$

e quindi

$$(1+C)u_{n,j} - C u_{n,j-1} = u_{n-1,j} + k f_{n,j} \quad f_{n,j} = f(nk, jh)$$

Analogamente per l'errore,

$$\frac{e_{n,j} - e_{n-1,j}}{k} + v \frac{e_{n,j} - e_{n,j-1}}{h} = O(k,h) \quad e_{0,j} = 0, \quad e_{n,0} = 0 \quad j, n \geq 1$$

ossia

$$(1+C)e_{n,j} - C e_{n,j-1} = e_{n-1,j} + kO(k,h).$$

In forma matriciale

$$\begin{pmatrix} 1+C & & & & \\ -C & 1+C & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -C & 1+C \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e_{n,1} \\ e_{n,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n,J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{n-1,1} \\ e_{n-1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n-1,J} \end{bmatrix} + kO(k,h)$$

$$AE_n = E_{n-1} + kO(k,h)$$

$$E_n = A^{-1}E_{n-1} + k A^{-1}O(k,h).$$

Passando alle norme, si ha

$$\|E_n\| \leq \|A^{-1}\| \|E_{n-1}\| + k \|A^{-1}\| \|O(k,h)\|$$

e, sotto l'ipotesi che sia $\|A^{-1}\| \leq 1$ indipendentemente dalla dimensione J , si ha

$$\|E_n\| \leq nk O(k,h) \leq T O(k,h) \quad \text{per ogni } n \leq N \quad \text{con } Nk = T$$

e quindi la convergenza del metodo su ogni sottinsieme finito $[0, T] \times [0, X]$.

Osserviamo ora che

$$A = (1+C) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -d & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -d & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dove } d = \frac{C}{1+C} (< 1)$$

e quindi

Otteniamo così la seguente equazione alle differenze

$$\frac{y(t_{n+1}, x_i) - y(t_n, x_i)}{k} = a \frac{y(t_n, x_{i-1}) - 2y(t_n, x_i) + y(t_n, x_{i+1}))}{h^2} + O(k, h^2) \quad i=1, \dots, m-1$$

con le condizioni iniziali:

$$y(0, x_i) = g(x_i) \quad i=0, \dots, m$$

e le condizioni al bordo

$$y(t_n, 0) = y(t_n, 1) = 0 \quad n=1, \dots, N$$

Trascurando l'errore di troncamento si ottiene il seguente sistema

$$\frac{y_{i,n+1} - y_{i,n}}{k} = a \frac{y_{i-1,n} - 2y_{i,n} + y_{i+1,n}}{h^2} \quad i=1, \dots, m-1, \quad n=0, \dots, N-1 \quad (1.21)$$

dove, per ogni i ed n , $y_{i,n}$ è l'approssimazione numerica di $y(t_n, x_i)$. Le condizioni ai limiti sono, per ogni n ,

$$y_{0,n} = y_{m,n} = 0, \quad n=1, \dots, N$$

e quelle iniziali sono, per ogni x_i

$$y_{i,0} = y(0, x_i) = g(x_i) \quad i=0, \dots, m$$

Il metodo si esprime quindi con la seguente relazione ricorsiva nell'incognita

$Y_{n+1} = (y_{1,n+1}, y_{2,n+1}, \dots, y_{m-1,n+1})$:

$$\begin{bmatrix} y_{1,n+1} \\ y_{2,n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{m-1,n+1} \end{bmatrix} = \frac{ak}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & -2 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{m-1,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{m-1,n} \end{bmatrix}$$

ovvero:

$$Y_{n+1} = (I + \lambda T) Y_n$$

dove $\lambda = \frac{ak}{h^2}$.

Analogamente, per l'errore $e_{i,n} := y(t_n, x_i) - y_{i,n}$ $n=0, \dots, N$, si ottiene la relazione ricorsiva

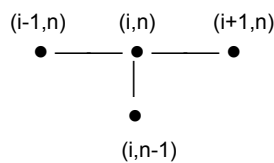
$$\begin{bmatrix} e_{1,n+1} \\ e_{2,n+1} \\ \vdots \\ e_{m-1,n+1} \end{bmatrix} = \frac{ak}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,n} \\ e_{2,n} \\ \vdots \\ e_{m-1,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1,n} \\ e_{2,n} \\ \vdots \\ e_{m-1,n} \end{bmatrix} + kO(k, h^2).$$

ovvero,

$$E_{n+1} = (I + \lambda T) E_n + k O(k, h^2) \quad \text{per } n=1, 2, \dots, N-1$$

dove $E_{n+1} = (e_{1,n+1}, e_{2,n+1}, \dots, e_{m-1,n+1})^T$.

Approssimando la derivata temporale con una differenza all'indietro si ottiene invece lo schema **BC** (Backward-Centered),



e la relazione

$$\frac{y(t_n, x_i) - y(t_{n-1}, x_i)}{k} = a \frac{y(t_n, x_{i-1}) - 2y(t_n, x_i) + y(t_n, x_{i+1}))}{h^2} + O(k, h^2) \quad i = 1, \dots, m-1$$

Trascurando l'errore, l'approssimazione numerica e' data dal sistema

$$\begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{m-1,n} \end{bmatrix} - \frac{ak}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{m-1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,n-1} \\ y_{2,n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{m-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Come si può osservare, in questo caso la relazione per la soluzione numerica $Y_n = (y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m-1,n})$ è implicita e richiede, ad ogni passo temporale, la risoluzione di un sistema lineare

$$(I - \lambda T) Y_n = Y_{n-1}$$

La corrispondente relazione per l'errore è:

$$\begin{bmatrix} e_{1,n} \\ e_{2,n} \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{m-1,n} \end{bmatrix} - \frac{ak}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,n} \\ e_{2,n} \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{m-1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1,n-1} \\ e_{2,n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{m-1,n-1} \end{bmatrix} + k O(k, h^2)$$

e quindi

$$E_n = (I - \lambda T)^{-1} E_{n-1} + k(I - \lambda T)^{-1} O(k, h^2)$$

Per entrambi i metodi trattati, come per qualunque altro metodo alle differenze, l'errore soddisfa ad una relazione ricorsiva del tipo

$$BE_n = AE_{n-1} + kO$$

$$E_n = B^{-1}AE_{n-1} + kB^{-1}O$$

dove le matrici A e B, con $|B| \neq 0$, dipendono dai valori di discretizzazione k ed h, e dove la discretizzazione stessa è supposta consistente col problema differenziale trattato, cioè

$$O = O(k^p, h^q)$$

per opportuni valori di p e q (dipendenti dal tipo di differenza adottato).

Per quanto riguarda la **convergenza** di un siffatto schema per $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$, analizziamo l'errore e osserviamo che se

$$\|B^{-1}A\| \leq 1 \text{ e } \|B^{-1}\| \leq M \quad (3.7)$$

uniformemente rispetto alla dimensione di A (cioè a m), allora su ogni intervallo temporale finito $[0, T]$ con $T = Nk$ si ha

$$E_n = (B^{-1}A)^n E_0 + k((B^{-1}A)^{n-1} + (B^{-1}A)^{n-2} + \dots + I)B^{-1}O \quad \forall n \leq N.$$

Poiché l'errore iniziale E_0 è nullo e vale l'ipotesi $\|B^{-1}A\| \leq 1$, si ha

$$\|E_n\| \leq knMO = TMO = O(k^p, h^q) \quad \forall n \leq N.$$

Avendo già verificato che entrambi gli schemi FC e BC sono consistenti (di ordine $p=1$ e $q=2$), per la convergenza ci rimane da verificare, per entrambi, le condizioni di **stabilità** $\|B^{-1}A\| \leq 1$ e $\|B^{-1}\| \leq M$.

Per lo schema in **FC** si ha:

$$E_{n+1} = (I + \lambda T)E_n + kO \quad \text{per } n=1, 2, \dots, N-1$$

quindi $B=I$ e $A=I + \lambda T$.

Si tratta dunque di verificare se $\|(I + \lambda T)\| \leq 1$ in qualche norma.

Essendo A simmetrica, conviene usare la norma $\|\cdot\|_2$, per la quale $\rho(A)=\|A\|_2$, e ricordare che gli autovalori di $I+\lambda T$ sono dati da $1+\lambda\sigma_i$ con

$$\sigma_i = \left(-2 + 2\cos\left(\frac{i}{m}\pi\right) \right) \quad i = 1, \dots, m-1$$

autovalori di T .

Poichè gli autovalori di T sono negativi e quello di modulo massimo è maggiore di -4 , la condizione $|1+\lambda\sigma_i| \leq 1 \quad \forall i$ è soddisfatta se $1-4\lambda \geq -1$, cioè

$$\lambda = \frac{ak}{h^2} \leq 1/2.$$

In conclusione lo schema FC è **condizionatamente stabile**, e quindi **condizionatamente convergente**, inquanto la convergenza e' garantita sotto la condizione che i passi h e k tendano a zero rispettando il vincolo $\frac{ak}{h^2} \leq 1/2$. Nel caso di un passo spaziale h che sia già piccolo per esigenze di precisione, l'ampiezza del passo temporale k diventa così piccolo da rendere improponibile il metodo.

Per lo schema **BC** si ha invece

$$E_n = (I - \lambda T)^{-1}(E_{n-1}) + (I - \lambda T)^{-1}O \quad \text{per } n=1,2,\dots,N$$

quindi $B=(I-\lambda T)^{-1}$ e $A=I$. In questo caso le condizioni per la convergenza si riducono a

$$\|(I-\lambda T)^{-1}\| \leq 1 \quad \text{uniformemente rispetto alla dimensione } m.$$

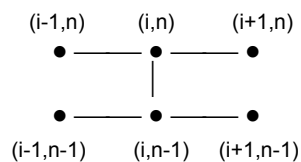
Gli autovalori di $I-\lambda T$ sono dati da $1/(1-\lambda\sigma_i)$. Poichè gli autovalori di T sono negativi, si ha $1/(1-\lambda\sigma_i) \leq 1$ per ogni λ .

Abbiamo quindi dimostrato che lo schema all'indietro è **incondizionatamente convergente**.

Si consideri infine il seguente schema di **Crank-Nicolson**, che consiste nell'approssimare la derivata seconda spaziale con la media di due differenze centrali ai tempi t_n e t_{n+1} . (Si lascia al lettore da verificare che tale schema fornisce un metodo consistente con ordine $p=2, q=2$)

$$\frac{y(t_n, x_i) - y(t_{n-1}, x_i)}{k} = \frac{a}{2} \left(\frac{y(t_n, x_{i-1}) - 2y(t_n, x_i) + y(t_n, x_{i+1}))}{h^2} + \frac{y(t_{n-1}, x_{i-1}) - 2y(t_{n-1}, x_i) + y(t_{n-1}, x_{i+1}))}{h^2} \right) + O(k^2, h^2) \quad i = 1, \dots, m-1$$

Esso e' rappresentato dallo schema



La relazione ricorsiva per il vettore E_n degli errori assume la forma:

$$(I - \lambda T/2)^{-1} E_n = (I + \lambda T/2) (E_{n-1}) + kO$$

e quindi

$$E_n = (I - \lambda T/2)^{-1} (I + \lambda T/2) (E_{n-1}) + (I - \lambda T/2)^{-1} kO \quad \text{per } n=1, 2, \dots, N.$$

Infine le condizioni di stabilita' (3.7)

$$\|(I - \lambda T/2)^{-1} (I + \lambda T/2)\| \leq 1 \quad \text{e} \quad \|(I - \lambda T/2)^{-1}\| \leq M$$

sono verificate **incondizionatamente** rispetto a k e ad h poiche' gli autovalori della matrice $(I - \lambda T/2)^{-1} (I + \lambda T/2)$ sono dati da $(1 + \frac{1}{2} \lambda \sigma_i) / (1 - \frac{1}{2} \lambda \sigma_i)$ che risultano ≤ 1 per ogni i e per ogni λ . La seconda condizione $\|(I - \lambda T/2)^{-1}\| \leq M$ e' gia' stata verificata con $M=1$.

Equazione di Poisson.

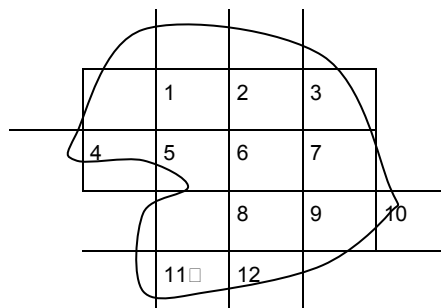
Sia $u(x,y)$ una funzione definita in un dominio D del piano R^2 , il cui bordo sarà indicato con Γ_D , che soddisfa l'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \quad x,y \in D$$

con la *condizione al contorno*,

$$u(x,y)=0 \quad x,y \in \Gamma_D.$$

Effettuiamo una reticolazione del dominio D con rette parallele agli assi coordinati, distanti tra loro una quantità positiva h , ed enumeriamo con un indice progressivo i i nodi P_i che risultano *interni* al dominio.



Usando le differenze centrali per approssimare le derivate parziali seconde, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 u(P_i)}{\partial x^2} = \frac{u(P_{i-1}) - 2u(P_i) + u(P_{i+1}))}{h^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 u(P_i)}{\partial y^2} = \frac{u(P_{i-r_j}) - 2u(P_i) + u(P_{i+s_j}))}{h^2}$$

dove i punti P_{i-r_j} e P_{i+s_j} sono sovrastanti e sottostanti il punto P_i nel reticolo.

il sistema sarebbe risultato *pentadiagonale a blocchi* e la sua dimensione sarebbe cresciuta considerevolmente. Se il dominio D fosse, per esempio, un cubo con lo spigolo unitario, un reticolo con 10 punti interni su ogni coordinata darebbe luogo ad un sistema di dimensione 1000.

Esempio:

Consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8\pi^2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

con la *condizione al contorno*,

$$u(x,y) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \quad x,y \in \Gamma_D.$$

La soluzione esatta del problema e' data da $\sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$. Il metodo delle differenze con $h=k=1/40$, fornisce la soluzione in figura.

