

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI 2

### 2. PROBLEMI AI LIMITI

I **problemi differenziali ai limiti** sono quelli nei quali all'equazione differenziale definita in un insieme  $[a,b]$ , vengono affiancate delle condizioni sulla soluzione, e/o sulle sue derivate, non solo nel punto iniziale  $a$  (problema di Cauchy) ma in entrambi gli estremi (o "limiti")  $a$  e  $b$ .

Rispetto al problema dell'esistenza e unicità della soluzione, la situazione è sostanzialmente diversa da quella che si ha nel caso del problema di Cauchy. Basti pensare all'equazione

$$y''(t)+y(t)=0$$

il cui integrale generale è

$$y(t)=c_1\sin(t)+c_2\cos(t) \quad \text{con } c_1 \text{ e } c_2 \text{ arbitrari.}$$

Nell'intervallo  $[0,\pi/2]$  si ha

$$y(0)=0, y(\pi/2)=1 \quad \Rightarrow \quad \text{soluzione unica: } y(t)=\sin(t)$$

$$y(0)=0, y(\pi/2)=0 \quad \Rightarrow \quad \text{soluzione unica: } y(t)\equiv 0$$

Nell'intervallo  $[0,\pi]$  si ha

$$y(0)=0, y(\pi)=1 \quad \Rightarrow \quad \text{non esiste soluzione}$$

$$y(0)=0, y(\pi)=0 \quad \Rightarrow \quad \text{soluzione } y(t)=c \sin(t) \quad \text{per ogni } c \in \mathbb{R}$$

Diciamo che il problema è **ben posto** quando sono assegnate delle condizioni ai limiti che, in presenza di soluzioni, ne garantiscono l'unicità.

In generale, il problema dei due punti si formula nel seguente modo:

problemi del primo ordine:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) && \text{per } t \in [a, b] \\ g(y(a), y(b)) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

problemi del secondo ordine:

$$\begin{aligned}y'' &= f(t, y, y') && \text{in } [a, b] && (2.2) \\g_1(y(a), y'(a), y(b), y'(b)) &= 0 \\g_2(y(a), y'(a), y(b), y'(b)) &= 0\end{aligned}$$

Sono di particolare interesse le seguenti condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned}y(a) &= \alpha \\y(b) &= \beta && \text{(condizioni di Dirichlet)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(a) - y(b) &= 0 \\y'(a) - y'(b) &= 0 && \text{(condizioni di periodicità)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_1(y(a), y'(a)) &= 0 \\g_2(y(b), y'(b)) &= 0 && \text{(condizioni di Sturm-Liouville)}\end{aligned}$$

Un teorema di esistenza e unicità per il “problema dei due punti”

Consideriamo il **problema dei due punti**

$$y'' = f(t, y, y') \text{ in } [a, b]$$

con le condizioni ai limiti di Dirichlet

$$y(a) = \alpha \quad \text{e} \quad y(b) = \beta.$$

Supponiamo inoltre che le derivate parziali  $\partial f(t, y, y') / \partial y$  e  $\partial f(t, y, y') / \partial y'$  esistano, siano continue, e soddisfino le condizioni

$$\partial f(t, y, y') / \partial y > 0$$

$$|\partial f(t, y, y') / \partial y'| \leq M$$

per ogni  $t \in [a, b]$  e per ogni  $y, y' \in [-\infty, \infty]$ .

Allora il problema ammette una ed una sola soluzione.

Da questo teorema si ricava, per esempio, che per l'equazione lineare

$$y''=a(t)y+f(t) \quad \text{con } a(t)>0 \quad \forall t$$

il problema dei due punti ammette una ed una sola soluzione per qualunque scelta di  $\alpha$  e  $\beta$ .

Consideriamo ora alcuni problemi ai limiti e alcuni metodi numerici per la loro risoluzione approssimata. I metodi che verranno considerati sono:

***Metodi shooting***

***Metodi delle differenze finite***

***Metodi del residuo***

### **Metodi "shooting"**

Un metodo shooting, piu' che un metodo preciso, e' una procedura che si puo' adattare a svariati tipi di problemi differenziali ai limiti in  $[a,b]$ . Il principio di base e' il seguente: *data una 'equazione differenziale, supponiamo che il problema di Cauchy corrispondente ammetta soluzione unica per qualunque valore iniziale  $y(a)$ , se si tratta di equazioni del primo ordine, oppure  $y(a)$  e  $y'(a)$ , se si tratta di equazioni del secondo ordine, e cosi' via. Si tratta ora di trovare i valori iniziali per i quali la soluzione del corrispondente problema di Cauchy soddisfa le condizioni ai limiti del problema originario.*

### **Un problema del primo ordine:**

Consideriamo il seguente problema differenziale del primo ordine

$$y'(t)=f(t,y(t)) \quad \text{per } t \in [a,b]$$

con la seguente condizione sui valori agli estremi  $y(a)$  ed  $y(b)$ :

$$g(y(a),y(b))=0$$

e supponiamo che tale problema ammetta soluzioni. Supponiamo inoltre che siano verificate le ipotesi per l'esistenza e l'unicità del problema di Cauchy associato

all'equazione data. Quindi supporremo che per ogni condizione iniziale  $y(a)=\xi$  esista una ed una sola soluzione, che indicheremo con  $y(t,\xi)$ . Detta  $y(b,\xi)$  tale soluzione nel punto  $b$ , è chiaro che se la coppia  $(\xi, y(b,\xi))$  soddisfa la condizione ai limiti

$$g(\xi, y(b,\xi))=0$$

allora la funzione  $y(t,\xi)$  è la soluzione del nostro problema. Ho così trasformato il problema ai limiti nella ricerca del valore iniziale  $\xi$  come radice dell'equazione

$$F(\xi):=g(\xi, y(b,\xi))=0 \tag{2.3}$$

E' evidente che, in generale, non si dispone dell'espressione esplicita della funzione  $F(\xi)$  in quanto essa dipende dal termine funzionale  $y(b,\xi)$  il cui valore si ottiene attraverso la risoluzione, in  $[a,b]$ , di un problema di Cauchy.

Disponendo di metodi efficienti per la risoluzione del problema di Cauchy, posso però calcolare, in modo approssimato, il valore di  $y(b,\xi)$  e quindi di  $F(\xi)$  per ogni  $\xi$ .

Inoltre, disponendo di metodi veloci per la ricerca delle radici di equazioni non lineari che fanno uso solo di valutazioni puntuali della funzione  $F$ , posso ottenere una soluzione approssimata dell'equazione (2.3).

Il valore  $\xi^*$  così trovato è una approssimazione del valore iniziale  $y(a)$  (incognito) al quale corrisponde un valore finale  $y(b)$  tale che i due soddisfino la condizione ai limiti  $g(y(a),y(b))=0$ .

Una possibile condizione ai limiti è, per esempio, quella di periodicità  $y(a)-y(b)=0$  per la quale l'equazione (2.3) assume la semplice forma:

$$\xi = y(b,\xi).$$

Il metodo shooting, che si applica in modo sostanzialmente uguale anche in circostanze diverse, valorizza il metodo dicotomico ed i metodi iterativi di Steffensen e delle secanti, rispetto a quello di Newton, perché non richiedono valutazioni puntuali della derivata della funzione  $F(\xi)$ .

### Problemi del secondo ordine:

Consideriamo l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$y''=f(t,y,y') \quad \text{in } [a,b] \quad (2,4)$$

con opportune condizioni ai limiti tra quelle considerate.

Anche qui supponiamo che il problema di Cauchy per l'equazione (2.4) ammetta una ed una sola soluzione. Trasformiamo quindi l'equazione (2.4) in un sistema del primo ordine nelle incognite  $u=y$  e  $v=y'$ ,

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= f(t,u,v) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Il problema ai limiti ammette per soluzione quella relativa ad opportuni valori iniziali  $u(a)=y(a)$  e  $v(a)=y'(a)$  da determinarsi.

Per esempio nel classico problema dei due punti con condizioni di Dirichlet,

$$\begin{aligned} y'' &= f(t,y,y') & t &= [a,b] \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{aligned}$$

è noto il valore  $u(a)=y(a)=\alpha$  ma non è noto  $v(a)=y'(a)$ . Allora fissiamo un valore di tentativo  $v(a)=\xi$  e risolviamo il problema (2.5) con le condizioni ai limiti  $u(a)=\alpha$  e  $v(a)=\xi$ .

Indichiamo la soluzione (che dipende da  $\xi$ ) con  $u(t,\xi)$  e  $v(t,\xi)$ . Naturalmente noi cerchiamo il valore di  $\xi$  per il quale si ha  $u(b,\xi)=\beta$ .

Il termine "shooting" (sparare) trae origine da questo problema pensato come un sistema dinamico nel quale la soluzione descrive la traiettoria di un punto materiale che viene "sparato" da una posizione iniziale  $u(a)$  con una direzione incognita  $v(a)=u'(a)$  tale che nel punto  $b$  la particella "centri" il valore assegnato  $u(b)$ .

Come nel caso precedente, indichiamo con  $F(\xi)$  l'operatore che associa a  $\xi$  il valore  $u(b,\xi)$ . L'equazione da risolvere è, in questo caso:

$$F(\xi)=\beta.$$

Leggermente più complesso è il caso delle *condizioni periodiche* nel quale non è noto né  $u(a)$  né  $v(a)$  che devono essere visti come incognite

$$u(a)=\xi \quad v(a)=\eta \quad (2.6)$$

Dette  $u(t,\xi,\eta)$  e  $v(t,\xi,\eta)$  le soluzioni dell'equazione (2.5) con condizioni iniziali (2.6), si tratta di determinare  $\xi$  e  $\eta$  in modo che nel punto finale  $b$  siano verificate le condizioni di periodicità

$$\xi=u(b,\xi,\eta) \quad e \quad \eta=v(b,\xi,\eta).$$

Definiamo l'operatore  $F(\xi,\eta)$  che associa alla coppia di valori iniziali  $x=(\xi,\eta)$ , la coppia di valori finali  $(u(b,\xi,\eta), v(b,\xi,\eta))$ . Questa volta dobbiamo risolvere una equazione in  $\mathbb{R}^2$  nell'incognita  $(\xi,\eta)$ :

$$(\xi,\eta)=F(\xi,\eta)$$

### Il caso lineare

Consideriamo il caso di una equazione differenziale lineare del prim'ordine, con condizioni ai limiti anch'esse lineari:

$$y'=g(t)y + f(t) \quad t \in [a,b]$$

$$\alpha y(a)+\beta y(b)=d.$$

Detto  $\xi$  il valore incognito di  $y(a)$ , il metodo *shooting* consiste nella ricerca della radice dell'equazione  $F(\xi)=0$  dove, con le solite notazioni, la funzione  $F$  è:

$$F(\xi)=\alpha\xi+\beta y(b,\xi) - d.$$

Osserviamo che la funzione  $F$  è una funzione affine in  $\xi$ . Infatti, detto  $u(t)$  l'integrale della equazione omogenea associata ed  $\bar{y}(t)$  un integrale particolare della completa, l'integrale generale è  $y(t)=cu(t)+\bar{y}(t)$  dove la costante  $c$  è determinata dalla condizione iniziale  $y(a)=\xi$ :

$$\xi=cu(a)+\bar{y}(a)$$

$$c = \frac{\xi - \bar{y}(a)}{u(a)}$$

La soluzione, relativa al dato iniziale  $\xi$ , è quindi  $y(t, \xi) = \frac{\xi - \bar{y}(a)}{u(a)} u(t) + \bar{y}(t)$  che, calcolata in

$b$ , fornisce  $y(b, \xi) = \frac{\xi - \bar{y}(a)}{u(a)} u(b) + \bar{y}(b)$ . La funzione  $F(\xi)$  assume quindi la forma affine:

$$F(\xi) = \alpha \xi + \beta \frac{\xi - \bar{y}(a)}{u(a)} u(b) + \beta \bar{y}(b) - d.$$

Di conseguenza i metodi iterativi delle secanti o di Steffensen raggiungono la soluzione esatta dopo una sola iterazione. (Si osservi che l'affinità di  $F(\xi)$  è stata dimostrata nell'ipotesi che la soluzione  $y(b, \xi)$  sia esatta. Il lettore dimostri che la proprietà rimane verificata anche quando  $y(b, \xi)$  è ottenuto attraverso un metodo di RK con un numero indeterminato di passi).

### **Metodi alle differenze:**

I **metodi alle differenze** consistono nel sostituire alle derivate presenti nell'equazione delle opportune differenze finite che approssimano le derivate stesse su tutti i punti di una **griglia** prefissata sull'insieme di integrazione.

Un caso particolare è già stato visto nel metodo delle linee dove soltanto la derivata parziale seconda nella variabile spaziale  $x$  è stata approssimata dalla differenza centrale seconda per ogni valore temporale  $t$  (da cui il termine "semi-discretizzazione").

Limitiamoci ora al caso di equazioni ordinarie e analizziamo l'errore che si commette nel sostituire le derivate con le differenze e, in particolare, vediamo se l'errore tende a zero, per  $h \rightarrow 0$ , e con quale ordine d'infinitesimo.

A tal fine supponiamo di aver fissato, nell'intervallo di integrazione  $[a, b]$ , una griglia di  $N+1 = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  punti, estremi inclusi, così definiti

$$x_0 = a, \quad x_i = a + ih \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad x_N = b \quad \text{dove } h = (b-a)/N \text{ e' il } \mathbf{passo}.$$

Tipiche approssimazioni alle differenze sono:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + \sigma_i(h) \quad \text{differenza prima all'indietro, } \sigma_i(h) = O(h)$$

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h} + \sigma_i(h) \quad \text{differenza prima in avanti, } \sigma_i(h) = O(h)$$

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + \sigma_i(h) \quad \text{differenza prima centrale, } \sigma_i(h) = O(h^2)$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + \sigma_i(h) \quad \text{differenza seconda centrale, } \sigma_i(h) = O(h^2)$$

dove gli **errori di troncamento**  $\sigma_i(h)$ , per le differenze prime e seconde, sono infinitesimi di ordine, rispettivamente 1 e 2, **uniformi** nell'intervallo  $[a,b]$ .

Un problema di elasticità:

Il **momento flettente**  $y(x)$  di una trave di lunghezza unitaria, appoggiata agli estremi 0, ed 1 e sottoposta ad un carico verticale  $f(x)dx$  su ogni elemento di lunghezza  $dx$ , è dato dalla soluzione del problema dei due punti:

$$-y'' + g(x)y = f(x) \quad \text{per } x \in [0,1], \quad g(x) > 0$$

con le **condizioni ai limiti di Dirichlet omogenee**:

$$y(a)=0, \quad y(b)=0.$$

La funzione  $g(x)$  è data da  $g(x) = \frac{P}{E \cdot I(x)}$ , dove  $E$  è il modulo di Young,  $I(x)$  è il momento principale d'inerzia della trave nel punto  $x$ , e  $P$  è la forza applicata agli estremi della trave in direzione della trave stessa e orientata verso l'esterno.

L'equazione di diffusione-reazione stazionaria

La stessa equazione può essere vista come il modello relativo ad un problema di diffusione-reazione monodimensionale in  $[a,b]$

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(t,x) - g(x)y(t,x) + f(x)$$



in condizioni stazionarie, dove si considera che la soluzione  $y$  non dipenda dal tempo,  $y(t,x)=y(x)$ , e soddisfi le condizioni al bordo  $y(a)=\alpha$ ,  $y(b)=\beta$ .

Si ottiene in questo caso:

$$-y'' + g(x)y = f(x) \quad \text{per } x \in [a,b], \quad g(x) > 0$$

con le *condizioni ai limiti di Dirichlet* :

$$y(a)=\alpha, \quad y(b)=\beta.$$

Il **metodo delle differenze** consiste nel calcolare l'equazione in tutti i punti interni della griglia sostituendo la derivata seconda con la corrispondente differenza centrale seconda.

Si ottiene così il sistema:

$$-\frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}))}{h^2} + g(x_i)y(x_i) = f(x_i) + \sigma_i(h) \quad i=1, \dots, N-1. \quad (2.7)$$

Ignorando gli errori  $\sigma_i$ , indicando con  $y_i$  l'approssimazione di  $y(x_i)$ , e tenendo conto che le condizioni ai limiti forniscono

$$y_0=y(a)=\alpha \quad \text{e} \quad y_N=y(b)=\beta,$$

si ottiene il sistema

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + g(x_i)y_i = f(x_i) \quad i=1, \dots, N-1. \quad (2.8)$$

nell'incognita  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})^T$  che, in forma compatta, diventa

$$AY = c \quad (2.9)$$

dove la matrice  $A$  ha la forma *tridiagonale* :

$$A = 1/h^2 \begin{vmatrix} 2+h^2g_1 & -1 & & & \\ -1 & 2+h^2g_2 & -1 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & -1 & 2+h^2g_i & -1 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & 2+h^2g_{N-2} & -1 \\ & & & & -1 & 2+h^2g_{N-1} \end{vmatrix}$$

ed il vettore  $c$  è dato da  $c = (h^2f(x_1) + \alpha, h^2f(x_2), \dots, h^2f(x_{N-2}), h^2f(x_{N-1}) + \beta)^T$ .

Viceversa, per il vettore  $e = (y(x_1) - y_1, y(x_2) - y_2, \dots, y(x_{N-1}) - y_{N-1})^T$  degli errori nei punti della griglia si ha, sottraendo la (2.8) dalla (2.7):

$$Ae = \Sigma(h)$$

dove  $\Sigma(h)$  è il vettore degli errori locali di troncamento:

$$\Sigma(h) = (\sigma_1(h), \sigma_2(h), \dots, \sigma_{N-1}(h))^T.$$

Poiché  $A$  gode della proprietà di *predominanza diagonale stretta* per ogni  $N$ , il teorema di Gerschgorin assicura che  $A$  è non singolare, quindi esiste l'inversa  $A^{-1}$  e si ha:

$$e = A^{-1} (\Sigma(h))$$

$$\|e\| \leq \|A^{-1}\| \|\Sigma(h)\|.$$

Infine, poiché  $\|\Sigma(h)\| = O(h^2)$  per ogni norma di  $R^{N-1}$ , per ottenere la convergenza di ordine 2 del metodo, per  $h \rightarrow 0$  (o se si preferisce per  $N \rightarrow +\infty$ ), è necessario avere la equilimitatezza di  $\|A^{-1}\|$  rispetto ad  $N$

$$\|A^{-1}\| \leq M \quad \forall N.$$

Poiché  $A$  è simmetrica e definita positiva, conviene considerare la norma 2 e osservare che  $\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}) = 1/\lambda_{\min}(A)$ . Quindi basta trovare una costante  $M$  tale che  $1/\lambda_{\min}(A) \leq M$ .

Attraverso il teorema di Gerschgorin si vede facilmente che  $\lambda_{\min}(A) \geq \min_i (g(x_i))$  e quindi

$M=1/\min(g(x))$  e' una maggiorazione uniforme per  $A^{-1}$ . In alternativa, detto  $u$  l'autovettore corrispondente all'autovalore di modulo minimo di  $A$ , si ha

$$u^T A u = \lambda_{\min}(A) u^T u.$$

Separando  $A$  nella somma  $A=T+D$  (entrambe definite positive) si ha, per  $K=\min(g(x))>0$ ,

$$\lambda_{\min}(A) u^T u = u^T T u + u^T D u > u^T D u \geq \min_i(g(x_i)) u^T u \geq K u^T u$$

da cui  $\lambda_{\min}(A)>K$  qualunque sia la dimensione di  $A$ . L'equilimitatezza di  $A^{-1}$  e' quindi dimostrata per  $M=1/K$  e con essa la convergenza del metodo con ordine 2.

**Definizioni:** La condizione che gli errori di troncamento siano infinitesimi viene indicata come la **consistenza** dell'operatore di discretizzazione rispetto all'operatore differenziale e l'ordine di infinitesimo viene indicato come l'**ordine di consistenza** (nel nostro caso l'ordine di consistenza e' 2). La condizione dell'equilimitatezza dell'operatore  $A^{-1}$  viene invece indicata come la **stabilita'** dell'operatore stesso.

Abbiamo dimostrato che, per lo schema delle differenze centrali applicato al problema dei due punti, vale la relazione

Consistenza + stabilita' = convergenza
--

Questa relazione, che si estende a molti schemi di approssimazione per problemi di equazioni differenziali, mette in evidenza che la sola consistenza non e', in generale, sufficiente a garantire la convergenza del metodo e che, in presenza di stabilita', il metodo converge con l'ordine di consistenza.

*Il metodo alle differenze per l'equazione di diffusione-trasporto stazionario.*

Consideriamo ora l'equazione

$$\begin{aligned} -\mu y'' + by' &= 0 & x \in [0, 1] \\ y(0) &= 0, & y(1) = 1 \end{aligned}$$

con  $\mu$  e  $b > 0$ , la cui soluzione è :  $y(x) = \frac{e^{\frac{b}{\mu}x} - 1}{e^{\frac{b}{\mu}} - 1} > 0$  per ogni  $0 < x \leq 1$ .

Osserviamo che anche questa equazione (ordinaria) può essere vista come il modello di diffusione-trasporto monodimensionale

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t, x) = -\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(t, x) + b \frac{\partial}{\partial x} y(t, x)$$

in condizioni stazionarie.

Definiamo  $P = \frac{bL}{2\mu}$  il **numero di Péclet globale** dove  $L$  è la lunghezza dell'intervallo di

integrazione ( pari a 1 nel nostro caso). Sia quindi  $P_h = Ph = \frac{bLh}{2\mu}$  il **numero di Péclet**

**locale** relativo ad una discretizzazione  $h$ .

Approssimando  $y'$  ed  $y''$  con le differenze centrali :

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad \text{e} \quad y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

e trascurando gli errori di troncamento si ottiene, per  $h=1/N$ , il sistema lineare

$$-\mu \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + b \frac{-y_{i-1} + y_{i+1}}{2h} = 0, \quad i=1, \dots, N-1$$

e quindi, il sistema tridiagonale

$$(P_h+1)y_{i-1} - 2y_i + (1-P_h)y_{i+1} = 0, \quad i=1, \dots, N-1$$

dove  $y_0=0$  e  $y_N=1$ .

Detta ancora  $A$  la matrice del sistema, con argomentazioni analoghe a quelle del paragrafo precedente, si dimostra che  $A^{-1}$  esiste ed è equilimitata, cosicché il metodo converge e l'ordine risulta essere 2 poiché entrambe le derivate sono state approssimate con differenze di ordine 2. Se avessimo approssimato la  $y'$  con la differenza in avanti o all'indietro avremmo avuto una convergenza di ordine 1.

Se il rapporto  $b/\mu$  tende a 0 allora (per l'Hopital) la soluzione tende all'identità  $y(x)=x$ . Quindi, per piccoli valori del numero di Péclet, ( $P \ll 1$ ) la soluzione è prossima alla

retta  $y=x$  congiungente i due valori ai limiti. Al contrario, per valori molto grandi di  $P$ , ( $P \gg 1$ ) il valore di  $y'(1) \approx b/\mu$  è grande. Cio' significa che, procedendo all'indietro dal punto  $x=1$ , dove vale 1, la soluzione precipita verso la soluzione nulla. La tangente alla soluzione in  $x=1$  raggiunge il valore nullo intorno a  $\mu/b$ . In questo caso si dice che la soluzione presenta uno **strato limite** di ampiezza  $O(\mu/b)$  intorno al limite  $x=1$ .

Per questo tipo di problema è interessante approfondire lo studio analizzando l'andamento qualitativo della soluzione approssimata analizzando, in particolare, se la soluzione numerica conserva il segno positivo per ogni  $x > 0$ .

L'equazione caratteristica è :

$$(1-P_h)\lambda^2 - 2\lambda + P_h + 1 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_1 = \frac{1+P_h}{1-P_h}, \quad \lambda_2 = \frac{1-P_h}{1-P_h} = 1$$

La soluzione generale è quindi data da

$$y_i = a(\lambda_1)^i + b(\lambda_2)^i = a \left( \frac{1+P_h}{1-P_h} \right)^i + b \quad i=0, \dots, N$$

con  $a$  e  $b$  costanti arbitrarie. Imponendo le con le condizioni ai limiti (per  $i=0$  e  $i=N$ ) si trova:

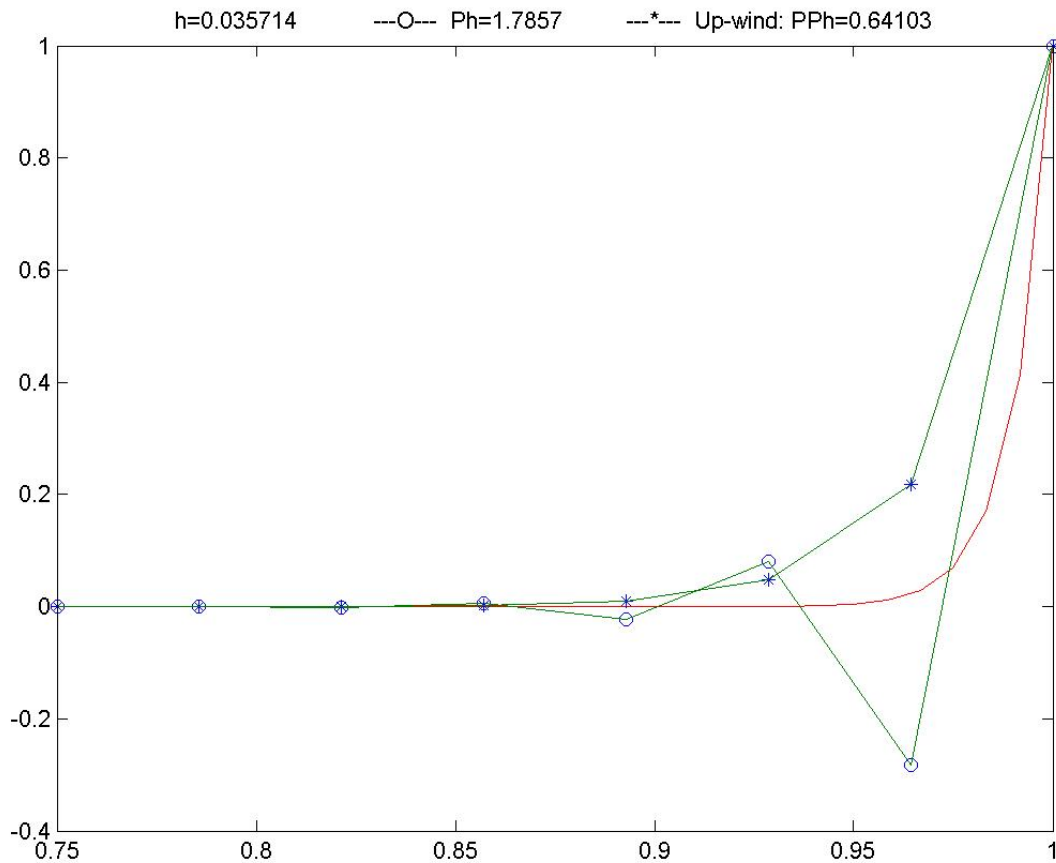
$$a = -b \quad b = \left( 1 - \left( \frac{1+P_h}{1-P_h} \right)^N \right)^{-1}$$

e quindi la soluzione discretizzata:

$$y_i = \frac{1 - \left( \frac{1+P_h}{1-P_h} \right)^i}{1 - \left( \frac{1+P_h}{1-P_h} \right)^N} \quad i=0, \dots, N$$

Osserviamo infine che se  $1 < P_h$  il numeratore cambia segno ad ogni incremento della potenza  $i$  e la soluzione diventa oscillante assumendo valori alternativamente positivi e negativi.

Nelle figure che seguono si vedono i grafici della soluzione esatta e delle soluzioni numeriche, indicate con ---o---, per un problema con numero di Péclet  $P=50$  e vari valori del passo  $h$ .



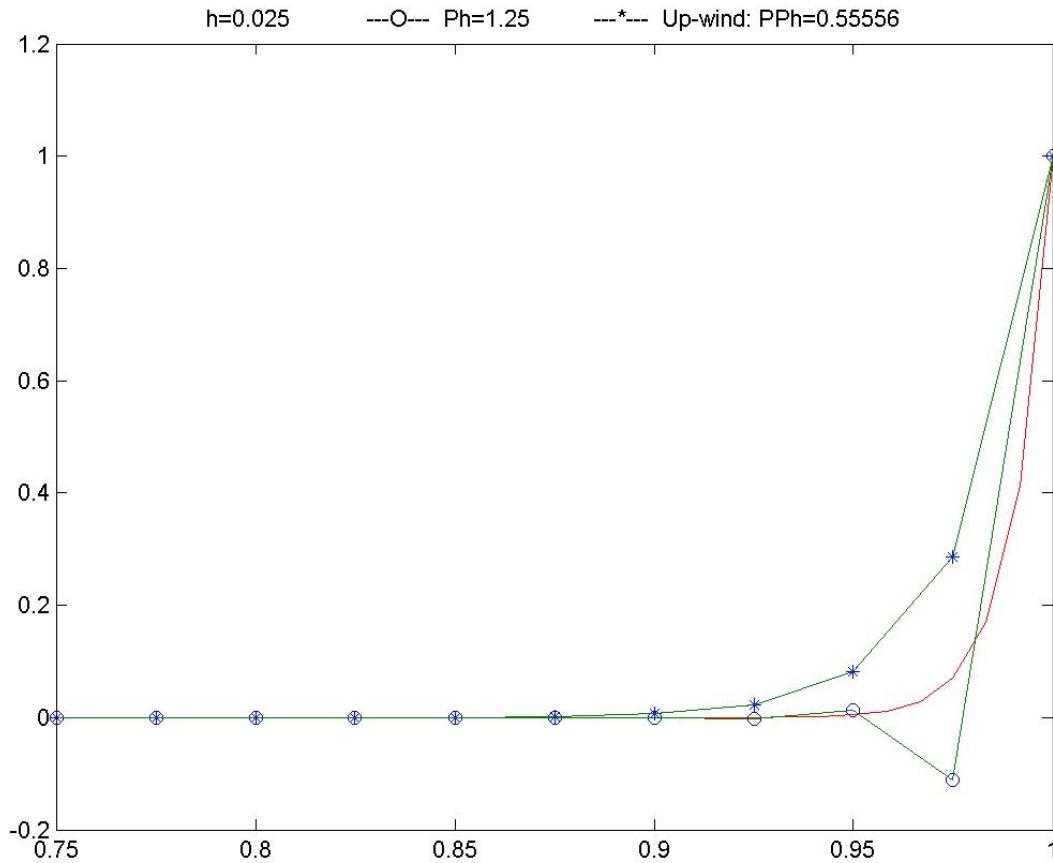
Per preservare la monotonia, e quindi il segno positivo, della soluzione bisogna procedere con un passo  $h$  tale che  $P_h < 1$ . Se il numero di Péclet è molto grande, cioè comporta la scelta di un passo  $h$  eccessivamente piccolo e, di conseguenza, un costo computazionale spesso troppo oneroso, specialmente nei problemi a più dimensioni.

Un modo di affrontare il problema si basa sull'osservazione che l'inconveniente citato è dovuto essenzialmente al fatto che il coefficiente di trasporto  $b$  domina sul coefficiente di diffusione  $\mu$ . Incrementando opportunamente  $\mu$  con una *diffusione artificiale* proporzionale ad  $h$ :  $\mu \rightarrow \mu_h = \mu(1 + P_h)$  si ottiene un problema perturbato

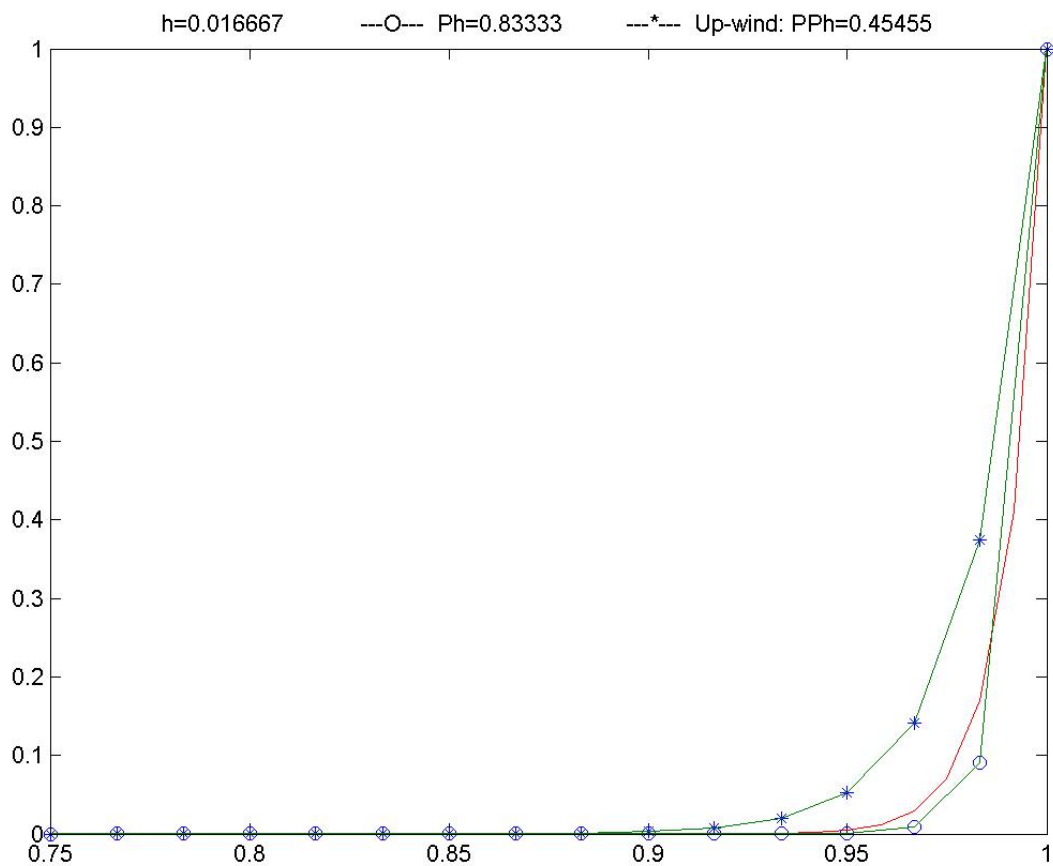
$$-\mu(1 + P_h)y'' + by' = 0$$

dove il termine  $-\mu P_h y''$  prende il nome di **viscosita' numerica**.

Il numero di Péclet locale  $PP_h$  del problema perturbato risulta  $<1$  per ogni  $h$ . Infatti il numero di Péclet globale e'  $PP=b/(2\mu(1+P_h))=P/(1+P_h)$  e quindi un numero di Péclet locale  $PP_h= P_h/(1+P_h)<1$ .



La conservazione della monotonia e' ottenuta pero' al prezzo di una caduta di precisione dovuta alla perurbazione  $-\mu P_h y''$ .



Lo schema numerico risultante, denominato *upwind*, assume la forma

$$-\mu(1+ P_h) \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + b \frac{-y_{i-1} + y_{i+1}}{2h} = 0, \quad i=1, \dots, N-1 \quad (2.10)$$

e, come abbiamo visto, fornisce una soluzione che conserva il carattere monotono per ogni valore del passo  $h$ . Il lettore verifichi che lo schema upwind (2.10) corrisponde esattamente allo schema

$$-\mu \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + b \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = 0, \quad i=1, \dots, N-1$$

dove, nell'equazione originaria, la  $y'(x)$  è stata approssimata con la differenza all'indietro



$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + O(h)$$

(anzichè la differenza centrale del secondo ordine). Tale schema è del primo ordine anzichè del secondo.

Condizioni al contorno di Neumann:

Le precedenti equazioni di diffusione possono essere accompagnate da condizioni al bordo di tipo diverso di quelle di Dirichlet dove il valore agli estremi è assegnato. Supponiamo, per esempio, che sull'estremo sinistro  $x=a$  sia assegnata la seguente condizione sulla derivata

$$y'(a) = y'_0,$$

detta *condizione di Neumann*, mentre sull'estremo destro sia data ancora la condizione  $y(b) = \beta$ . (In tal caso le condizioni al contorno vengono dette *condizioni miste*)

In tal caso la discretizzazione vista in precedenza include tra le incognite anche il valore della variabile  $y(a)$  la cui approssimazione verrà indicata, in accordo con le notazioni usate, con  $y_0$ . Il vettore incognito sarà quindi

$$Y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T.$$

Di conseguenza, la  $y''(a)$  non potrà essere approssimata dalla differenza centrale in  $x=a$

$$y''(a) = \frac{y(a-h) - 2y(a) + y(a+h)}{h^2} + \sigma(a, h)$$

perché essa necessiterebbe di un punto  $x=a-h$  che esce dal dominio di definizione del problema.

Il problema si può risolvere osservando che, attraverso lo sviluppo di Taylor, si ottiene la seguente approssimazione di  $y''(a)$ :

$$y''(a) = \frac{y(a+h) - y(a) - hy'(a)}{h^2/2} + O(h).$$

Trascurando, come al solito, gli errori di approssimazione, l'equazione discretizzata nel punto  $x=a$  sarà:

$$\frac{y_1 - y_0 - hy'_0}{h^2/2} - g_0 y_0 = f(a).$$

La matrice del sistema (in  $\mathbb{R}^{N \times N}$ ) sarà quindi

$$A = 1/h^2 \begin{vmatrix} 2+h^2g_0 & -2 & & & & & \\ & -1 & 2+h^2g_1 & -1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & -1 & 2+h^2g_i & -1 & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & -1 & 2+h^2g_{N-2} & -1 \\ & & & & & & -1 & 2+h^2g_{N-1} \end{vmatrix}$$

Si può dimostrare che anche, in questo caso, la condizione  $\|A^{-1}\| < M$  è verificata uniformemente rispetto alla dimensione  $N$  del sistema; quindi il metodo è ancora convergente. La convergenza in questo caso è, però, di ordine soltanto 1.

**Esercizio:** Si costruisca la matrice corrispondente alla discretizzazione del problema di diffusione-trasporto stazionario con le condizioni miste al bordo.

**Metodi dei residui pesati: (Galerkin-elementi finiti e spettrale, minimi quadrati, collocazione)**

Con il termine “metodo dei residui pesati” si definisce una vasta classe di metodi, che sono stati sviluppati a partire dalla fine 1800-inizio 1900, per la risoluzione di equazioni differenziali del tipo più generale con condizioni iniziali e al contorno. L’interesse per tali metodi è rivolto prevalentemente al loro impiego nella risoluzione di problemi governati da equazioni a derivate parziali sia di tipo stazionario che non stazionario. Cionondimeno, essi sono spesso impiegati nella risoluzione approssimata di problemi alle derivate ordinarie con condizioni al bordo e forniscono, in questi casi, risultati generalmente comparabili con quelli ottenuti attraverso i metodi alle differenze finite che abbiamo fin qui visto. Viceversa per la risoluzione di problemi a derivate parziali in dimensioni spaziali

maggiori di 1 e su domini non regolari, essi forniscono uno strumento piu' potente e flessibile rispetto alle differenze finite. La presentazione di tali metodi applicati a problemi ordinari facilita comunque la comprensione della loro estensione al caso multidimensionale.

Cominciamo quindi con la presentazione del principio che sta alla base del metodo dei residui per il problema dei due punti, con condizioni ai limiti omogenee

$$\begin{aligned} Ly(x) &= f(x) & x \in [a, b] \\ y(a) &= y(b) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove L e' un operatore differenziale lineare del secondo ordine (per esempio  $Ly := -\mu y'' + by$ ),  $y(x)$  e' la funzione incognita appartenente ad un opportuno spazio di funzioni V soddisfacenti le condizioni ai limiti ed f e' una funzione assegnata. Supponiamo inoltre che il problema ammetta soluzione unica.

Si osservi che l'aver imposto condizioni omogenee ai limiti non e' restrittivo. Infatti, se  $u(x)$  e' la soluzione del problema (con condizioni non omogenee)

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x) & x \in [a, b] \\ u(a) &= \alpha & u(b) = \beta \end{aligned}$$

essa puo' essere scritta come  $u(x) = y(x) - (\alpha(b-x)/(b-a) + \beta(x-a)/(b-a))$  dove la funzione  $y(x)$  e' soluzione del problema:

$$\begin{aligned} Ly(x) &= f(x) + L(\alpha(b-x)/(b-a) + \beta(x-a)/(b-a)) & x \in [a, b] \\ y(a) &= 0 & y(b) = 0. \end{aligned}$$

Quindi possiamo sempre considerare problemi del tipo (2.11).

Definiamo una successione  $V_N = \text{span}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x))$ ,  $N=1, 2, \dots$  di sottospazi a dimensione finita di V, con i cui elementi (che soddisfano le condizioni omogenee ai limiti) intendiamo approssimare la soluzione  $y(x)$  del nostro problema.

Supponiamo quindi che tali sottospazi siano idonei ad approssimare uniformemente ogni funzione di V. In altre parole, supponiamo che per ogni  $y(x) \in V$  e per ogni  $\varepsilon > 0$ , esista un opportuno intero N ed un elemento di  $V_N$ ,

$$u_N(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_N \varphi_N(x),$$

tale che

$$\|y(x) - u_N(x)\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Due esempi concreti di sottospazi  $V_N$  soddisfacenti tali condizioni sono dati dai *polinomi algebrici* in  $[a, b]$

$$V_N = \text{span}((x-a)(x-b), (x-a)(x-b)x, \dots, (x-a)(x-b)x^{N-1}),$$

e dai *polinomi a tratti*, di grado prefissato, su una griglia  $\{x_0=a, x_1, \dots, x_N=b\}$ , che verranno descritti nel paragrafo successivo.

Il nostro obiettivo e' quello di determinare i coefficienti  $c_1, \dots, c_N$  in modo da ottenere approssimazioni  $u_N(x)$  che convergano alla soluzione  $y(x)$  quando  $N \rightarrow \infty$ .

Per ogni scelta della funzione approssimante  $u_N(x)$ , definiamo il **residuo**:

$$R_N(x) := Lu_N(x) - f(x).$$

Imponendo vari tipi di condizioni sul residuo, possiamo definire dei criteri per la determinazione dei coefficienti  $c_1, \dots, c_N$ .

### **Metodo di Galerkin:**

Si richiede che il residuo  $R_N(x)$  sia ortogonale a tutti gli elementi della base  $\{\varphi_k\}_{k \in N}$  di  $V_N$  rispetto al prodotto scalare Hilbertiano:

$$\langle R_N, \varphi_k \rangle = \int_a^b R_N(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad k=1, \dots, N$$

ossia

$$\int_a^b (Lu_N(x) - f(x)) \varphi_k(x) dx = 0 \quad k=1, \dots, N \quad (2.12)$$

Cio' conduce al seguente sistema lineare nelle incognite  $c_i$ :

$$\int_a^b \left( L \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x) - f(x) \right) \varphi_k(x) dx = \int_a^b \left( L \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x) \right) \varphi_k(x) dx - \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = 0$$

$$\sum_{i=1}^N c_i \int_a^b L \varphi_i(x) \cdot \varphi_k(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx, \quad K=1, \dots, N.$$

In forma compatta il sistema e'

$$Ac = b$$

dove

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T,$$

$$b=(b_1, b_2, \dots, b_N)^T \text{ con } b_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx \quad k=1, \dots, N$$

$$A=(a_{i,k}) \quad \text{con } a_{i,k} = \int_a^b L_i(x) \cdot \varphi_k(x) dx \quad i, k=1, \dots, N.$$

Se i sottospazi  $V_N$  sono costituiti dai polinomi algebrici generati da  $\varphi_k=(x-a)(x-b)x^{k-1}$ :

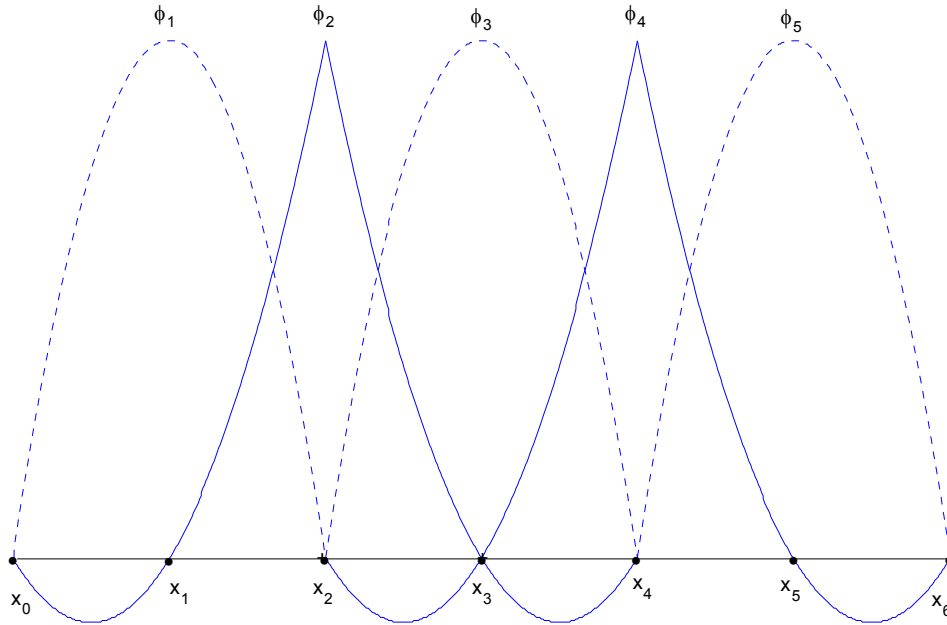
$$V_N = \text{span}((x-a)(x-b), (x-a)(x-b)x, \dots, (x-a)(x-b)x^{N-1}),$$

il metodo e' detto **metodo di Galerkin spettrale** ed e' caratterizzato dal fatto che la matrice del sistema di Gram-Schmidt e' piena.

Un'alternativa ai metodi spettrali e' data dai **metodi di Galerkin agli elementi finiti** dove i sottospazi  $V_N$  sono polinomi a tratti di grado fissato e generati da una base a *supporto* locale, cioe' da funzioni che sono diverse da zero solo su piccoli sottointervalli di  $[a,b]$ . Per esempio, assegnata una griglia  $\{x_0=a, x_1, \dots, x_N=b\}$ , con  $N$  pari, consideriamo le funzioni *quadratiche* a tratti generati dalla seguente base: (in questo caso  $\dim(V_N)=N-1$ )

$$\text{per } k \text{ dispari } (k \leq N-1): \quad \varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{(x_{k+1} - x)(x - x_{k-1})}{(x_{k+1} - x_k)(x_k - x_{k-1})} & x_k \leq x \leq x_{k+2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\text{per } k \text{ pari } (k \leq N-2): \quad \varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k-2})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k-2})} & x_{k-2} \leq x \leq x_k \\ \frac{(x_{k+1} - x)(x_{k+2} - x)}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+2} - x_k)} & x_k \leq x \leq x_{k+2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Si osservi che, per ogni  $k$ , si ha

$$\varphi_k(x_j) = \delta_{kj} \quad \text{e quindi} \quad u_N(x_k) = c_k,$$

cosicché i coefficienti  $c_k$  forniscono direttamente le approssimazioni  $y_k$  sui nodi.

In questo caso è evidente che nella matrice di Gram-Schmidt, il generico elemento di

indici  $a_{i,k} = \int_a^b L \varphi_i(x) \cdot \varphi_k(x) dx$  sarà diverso da zero solo per indici  $i, k$  tali che  $\varphi_i$  e  $\varphi_k$  hanno

supporto ad intersezione non vuota, o costituita da un solo punto. Pertanto su ogni riga del sistema ci saranno, al più, 5 coefficienti non nulli. In particolare il supporto di ogni  $\varphi_k$ , con  $k$  dispari, interseca solo il supporto della precedente e della successiva. In questo caso ci sono 3 elementi sulla riga  $k$ -esima. Se invece  $k$  è pari, il supporto di  $\varphi_k$  interseca il supporto di  $\varphi_{k-2}$ ,  $\varphi_{k-1}$ ,  $\varphi_{k+1}$  e  $\varphi_{k+2}$ . In questo caso sulla riga  $k$ -esima ci saranno 5 elementi non nulli.

Ancora l'equazione di diffusione-reazione:

Consideriamo, come esempio, l'equazione di diffusione-reazione a coefficienti costanti ( $Ly = -\mu y'' + by$ ) per la quale l'equazione (2.12) diventa

$$\int_a^b (-\mu u_N''(x) + bu_N(x) - f(x)) \varphi_k(x) dx = 0 \quad \forall k \quad (2.13)$$

$$-\mu \int_a^b u_N''(x) \varphi_k(x) dx + b \int_a^b u_N(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx \quad \forall k$$

Applicando la regola di integrazione per parti al primo termine, si trova

$$-\mu u_N'(x) \varphi_k(x) \Big|_a^b + \mu \int_a^b u_N'(x) \varphi_k'(x) dx + b \int_a^b u_N(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx$$

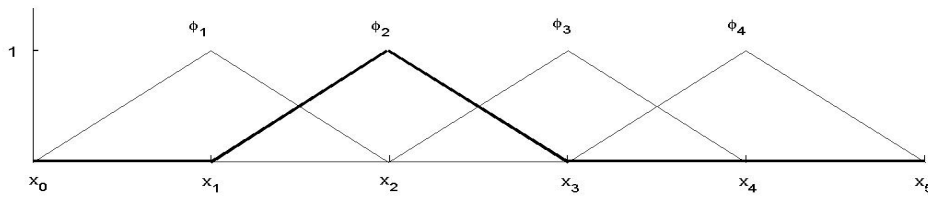
Tenuto conto che  $\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0$  si trova la seguente espressione, equivalente alla (2.13),

$$\mu \int_a^b u_N'(x) \varphi_k'(x) dx + b \int_a^b u_N(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx \quad \forall k$$

nella quale la funzione approssimante  $u_N(x)$  interviene solo con la sua derivata prima.

Cio' suggerisce la possibilita' di utilizzare funzioni approssimanti meno regolari, in particolare funzioni lineari a tratti sulla griglia  $a = x_0, \dots, x_N = b$  generati dalla base: (anche in questo caso  $\dim(V_N) = N-1$ )

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})} & x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ \frac{(x_{k+1} - x)}{(x_{k+1} - x_k)} & x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad k=1, \dots, N-1$$



Ponendo, come al solito,  $u_{N-1}(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots + c_{N-1}\phi_{N-1}(x)$ , troviamo il sistema lineare

$$\sum_{i=1}^{N-1} c_i \int_a^b (\mu\phi_i'(x) \cdot \phi_k'(x) + b\phi_i(x)\phi_k(x)) dx = \int_a^b f(x)\phi_k(x) dx, \quad K=1, \dots, N-1. \quad (2.14)$$

Inoltre, poiche' il supporto di ogni  $\phi_k(x)$  interseca solo quello di  $\phi_{k-1}(x)$  e di  $\phi_{k+1}(x)$ , si ha:

$$\sum_{i=k-1}^{k+1} c_i \int_a^b (\mu\phi_i'(x) \cdot \phi_k'(x) + b\phi_i(x)\phi_k(x)) dx = \int_a^b f(x)\phi_k(x) dx, \quad K=1, \dots, N-1.$$

In questo caso la matrice del sistema sara' tridiagonale.

Assumendo che la griglia sia uniforme, cioe'  $h=(b-a)/N$ , si ha

$$\phi_k'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ -\frac{1}{h} & x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \forall k$$

Attraverso il calcolo esplicito dei coefficienti del sistema, si ottiene infine:

$$\mu(c_{i-1} - 2c_i + c_{i+1}) - bh^2 \left( c_{i-1} \frac{1}{6} + c_i \frac{2}{3} + c_{i+1} \frac{1}{6} \right) = h \int_a^b f(x)\phi_i(x) dx \quad i=1, \dots, N-1$$

dove  $c_0=c_N=0$ . Anche per le funzioni lineari a tratti si ha  $\phi_k(x_j) = \delta_{kj}$  e  $u_N(x_k) = c_k$ , cosicche' i coefficienti  $c_k$  forniscono direttamente le approssimazioni  $y_k$  sui nodi:

$$\mu(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - bh^2 \left( y_{i-1} \frac{1}{6} + y_i \frac{2}{3} + y_{i+1} \frac{1}{6} \right) = h \int_a^b f(x)\phi_i(x) dx \quad i=1, \dots, N-1$$

dove  $y_0=y_N=0$ .



Confrontando tale equazione con la (2.8), relativa al metodo delle differenze nel caso  $\mu = 1$  e  $g(x)=b$ , si osserva che la parte diffusiva rimane inalterata mentre la parte reattiva e' differente e, in particolare, e' anch'essa tridiagonale.

Si osservi che il metodo di Galerkin richiede il calcolo di integrali per la costruzione sia dei coefficienti della matrice che dei termini noti del sistema. Cio' sara' fatto attraverso formule di quadratura che, oltre ad introdurre degli errori nel sistema, aumentano la complessita' computazionale del metodo. Quindi bisognera' usare formule di quadratura che abbiano, al tempo stesso, alta precisione e basso costo. Formule che godono di queste proprieta' sono le formule Gaussiane basate sugli zeri di certe classi di polinomi ortogonali, in particolare dei polinomi ortogonali di Legendre, di Lobatto e di Chebyshev.

### **Metodo dei minimi quadrati:**

Il metodo dei minimi quadrati consiste nel determinare i coefficienti dell'approssimante  $u_N(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\dots+c_N\varphi_N(x)$ , in modo da minimizzare la norma del residuo

$$R_N(x)=Lu_N(x)-f(x)=L\left(\sum_{i=1}^N c_i\varphi_i(x)\right)-f(x)=\sum_{i=1}^N c_iL\varphi_i(x)-f(x)$$

In altre parole cerchiamo l'elemento di minima distanza da  $f(x)$  nel sottospazio generato dalla base  $\{L\varphi_1(x),\dots, L\varphi_N(x)\}$ .

Abbiamo visto nelle premesse che la soluzione di tale problema, nella norma dedotta dal prodotto scalare, si ottiene imponendo al residuo le condizioni di ortogonalita'

$$\int_a^b (Lu_N(x)-f(x))L\varphi_k(x)dx = 0 \quad k=1,\dots,N$$

Che danno luogo al seguente *sistema di Gram-Schmidt*

$$\sum_{i=1}^N c_i \int_a^b L\varphi_i(x) \cdot L\varphi_k(x)dx = \int_a^b f(x)L\varphi_k(x)dx, \quad K=1,\dots,N.$$

La differenza rispetto al metodo di Galerkin consiste nel fatto che le funzioni test sono prese in uno spazio  $W_N$  diverso da  $V_N$  dove giace l'approssimazione  $u_N(x)$ . Nel metodo dei minimi quadrati  $W_N=\text{span}\{L\varphi_1(x),\dots, L\varphi_N(x)\}$  e  $V_N=\text{span}\{\varphi_1(x),\dots, \varphi_N(x)\}$ .

In generale, i metodi basati su due sottospazi diversi sono denominati **metodi di Petrov-Galerkin**.

**Metodo di collocazione:**

Il metodo di collocazione e' un metodo essenzialmente interpolatorio nel quale si chiede che il residuo sia nullo su un numero di nodi (o *punti di collocazione*)  $x_k \in [a,b]$  pari alla dimensione del sottospazio nel quale si cerca la soluzione:

$$R_N(x_k) = Lu_N(x_k) - f(x_k) = 0 \quad k=1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N c_i L\varphi_i(x_k) - f(x_k) = 0 \quad k=1, \dots, N$$

Anche nel metodo di collocazione possiamo optare per due scelte diverse dei sottospazi  $V_N$  che portano alla **collocazione-spettrale** e **collocazione-elementi finiti**. Per garantire la convergenza del metodo spettrale per ogni funzione continua  $f(x)$ , i punti di collocazione  $x_i$  sono presi come i nodi delle formule di quadratura di Gauss-Lobatto relative all'intervallo  $[a,b]$ .

**Cenni sulla convergenza del metodo dei residui:**

Sotto l'ipotesi  $y(x) \in C^p$ ,  $p \geq 2$  sulla regolarita' della soluzione, tutti i metodi del residuo che abbiamo visto sono convergenti, sia quelli spettrali che quelli agli elementi finiti.

In particolare:

a) se usiamo **elementi finiti** di grado  $r$  su una griglia di ampiezza  $h$  l'errore ha ordine  $s$ :

$$\|y(x) - u_N(x)\|_\infty \leq Ch^s \|y^{(s)}\|_\infty \quad \text{con } s = \min\{r+1, p\}.$$

Come dire che per soluzioni di classe  $C^p$  posso ottenere l'ordine  $p$  con  $r=p-1$  ed e' inutile aumentare  $r$ . In particolare se uso polinomi lineari a tratti,  $r=1$ , l'errore e'  $O(h^2)$ . Se uso elementi quadratici,  $r=2$ , l'errore sara'  $O(h^3)$  a condizione, pero', che la soluzione  $y(x)$  sia di

classe almeno  $C^3$ . E così via per elementi di grado superiore. Se la soluzione  $e'$  di classe  $C^\infty$  l'errore dipende solo da  $r$  ed  $e'$

$$\|y(x) - u_N(x)\|_\infty \leq Ch^{r+1} \|y^{(r+1)}\|_\infty$$

b) se usiamo **elementi spettrali** di grado  $r$ , l'errore  $e'$ :

$$\|y(x) - u_N(x)\|_\infty \leq C_s r^{-p} \|y^{(p)}\|_\infty$$

e, per soluzioni di classe  $C^\infty$ , l'errore  $e'$  infinitesimo di ordine superiore a qualunque ordine polinomiale.