

## CAPITOLO 2

## APPROSSIMAZIONE DELLE FUNZIONI

1. INTRODUZIONEApprossimazione con polinomi algebrici.

Sebbene noi siamo capaci di operare comunemente con funzioni del tipo  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $e^x$ ,  $\tanh(x)$ ,  $\sqrt{x}$  ecc, in quanto ne conosciamo molte proprietà che ci consentono di manipolarle e di metterle in relazione tra loro, la loro utilizzazione sul piano quantitativo è limitata dal fatto che esse sono definite attraverso un procedimento di passaggio al limite, in particolare con una serie convergente di potenze. Per esempio per ogni  $x$ , la funzione  $\sin(x)$  può essere definita attraverso la sua serie di Mac Laurin:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

per definire la quale occorre conoscere i valori di  $\sin(x)$  e di tutte le sue derivate in 0.

Ciò significa che, in generale, non si può esprimere il valore di  $\sin(x)$  in termini finiti rispetto ad  $x$ . D'altra parte per ogni  $\bar{x}$  è possibile ottenere una approssimazione di  $\sin(\bar{x})$ , con errore inferiore a qualunque tolleranza prefissata a priori, attraverso un opportuno troncamento della serie calcolata in  $\bar{x}$ . Inoltre, per  $k$  sufficientemente grande, il polinomio

$$p_{2k+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

è capace di approssimare  $\sin(x)$  al di sotto della tolleranza data su tutto l'insieme di periodicità  $[-\pi, \pi]$ . Quest'ultimo fatto è garantito dalla convergenza uniforme dello sviluppo di Mac Laurin. Dunque il polinomio  $p_{2k+1}(x)$  rappresenta un concreto "sostituto" della funzione  $\sin(x)$  a meno di quella tolleranza.

Più in generale, può accadere che per una funzione  $f(x)$  assegnata, si desideri disporre di una approssimazione uniforme di tipo polinomiale che risulta più semplice da tabulare, da integrare, da derivare ecc.

Se la funzione è sviluppabile in serie di Taylor, ancora una volta il polinomio :

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

fornisce una possibile approssimazione purchè si disponga effettivamente delle sue derivate successive nel punto  $x_0$ . Quest'ultima condizione limita notevolmente, sul piano numerico, l'uso dei polinomi di Taylor come polinomi approssimanti. Inoltre è noto che essi forniscono delle buone approssimazioni di  $f(x)$  soltanto in punti vicini ad  $x_0$ . Si ricordi per esempio la serie di Mac Laurin della funzione  $\arctg(x)$ :

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \dots$$

Per approssimare  $\pi/4 = \arctg(1)$  con errore inferiore a  $10^{-3}$  bisogna sommare 500 termini della serie numerica:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} + \dots$$

Ciò è comprensibile perché il polinomio di Taylor è costruito soltanto sui valori della funzione e delle sue derivate in  $x_0$ , ed è facile vedere che in quel punto il polinomio  $p_n(x)$  e le sue derivate fino all'ordine  $n-1$  coincidono con la funzione  $f(x)$  e le sue corrispondenti derivate. L'effetto di questo sbilanciamento è che per avere approssimazioni uniformi su intervalli sufficientemente ampi bisogna prendere polinomi di grado troppo alto.

Un modo per superare questi inconvenienti consiste nel considerare un generico polinomio

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

e determinare i suoi coefficienti attraverso altre condizioni; per esempio imponendo dei vincoli di **interpolazione** su più punti, detti **nodi d'interpolazione**, distribuiti in tutto l'intervallo sul quale si intende approssimare la funzione. Su questi nodi si impone soltanto che il polinomio coincida con la funzione, così si ha anche il vantaggio di allargare la classe di funzioni approssimabili per le quali non è più richiesta la conoscenza delle derivate ma soltanto dei valori nei nodi. In questo modo si possono anche approssimare funzioni discontinue e dati sperimentali.

L'interesse per i **polinomi algebrici** (indicheremo con  $\pi_n$  l'insieme dei polinomi di grado  $n$ ) come possibili approssimanti di funzioni continue su intervalli chiusi e limitati è dettato dal seguente teorema:

**Teorema di Weierstrass.** *Assegnata una funzione  $f(x)$  continua su un intervallo chiuso e limitato  $[a,b]$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un polinomio  $p(x)$  di grado opportuno tale che  $\max_{x \in [a,b]} |p(x) - f(x)| < \varepsilon$ .*

Esso ci assicura che le funzioni continue su intervalli chiusi e limitati sono approssimabili uniformemente, al di sotto di qualunque tolleranza prefissata, con polinomi algebrici. Ciò si esprime anche dicendo che:

*I polinomi algebrici sono densi nell'insieme  $C^0[a,b]$  rispetto alla norma:*

$$\|f\|_{\infty} := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

*detta norma lagrangiana.*

Dunque esiste una successione di polinomi  $p_n(x)$ , ciascuno di grado  $n$ , che converge uniformemente alla funzione  $f(x)$ . In particolare il seguente teorema fornisce, in concreto, una tale successione.

**Teorema di Bernstein :** *Per ogni funzione  $f(t) \in C^0[0,1]$  la successione dei polinomi di Bernstein:*

$$B_n(f,t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

*converge uniformemente ad  $f(t)$ .*

Un semplice cambio di variabile  $t = \frac{x-a}{b-a}$  trasforma  $[a,b]$  in  $[0,1]$  e quindi consente di passare da  $f(x) \in C^0[a,b]$  a  $f(t) \in C^0[0,1]$ . I polinomi di Bernstein per  $f(x)$  sono allora:

$$B_n(f,x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^i \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-i} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)$$

I polinomi di Bernstein sono utili per tracciare curve che approssimano dati sperimentali (curve di Beziér), ma non sono sempre una buona scelta per approssimare le funzioni. In generale, a parità di grado ci sono dei polinomi che approssimano meglio la funzione data.

### Approssimazione con polinomi generalizzati.

Certe caratteristiche della funzione da approssimare possono suggerire l'opportunità di considerare altre classi di funzioni approssimanti diverse dai polinomi

algebrici. Per esempio se la funzione è periodica di periodo  $2\pi$  è naturale approssimarla con **polinomi trigonometrici** del tipo:

$$t_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 \sin(x) + b_1 \cos(x) + \dots + a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$$

Se invece sappiamo che  $f(x)$  si annulla per  $x \rightarrow \infty$  allora i seguenti **polinomi esponenziali**:

$$e_n(x) = a_0 + a_1 e^{-x} + a_2 e^{-2x} + \dots + a_n e^{-nx}$$

sono più adatti ad una sua approssimazione anche su un intervallo illimitato. Se poi la funzione  $f(x)$  o una sua derivata presenta qualche discontinuità in un punto, allora i **polinomi a tratti** possono fornire dei risultati migliori. Per esempio la funzione  $f(x) = |\sin(x)|$  in  $[-1, 1]$  è approssimabile meglio con due tratti rettilinei a sinistra ed a destra di  $x=0$  che non con una parabola su tutto l'intervallo. Altre classi di funzioni approssimanti che considereremo sono le **funzioni splines**, che definiremo più avanti, e i **polinomi razionali** del tipo:

$$p_{n,m}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$

Per quanto riguarda i polinomi trigonometrici, vale il seguente teorema:

### **Il Teorema di Weierstrass. I polinomi trigonometrici**

$$t_n(x) = a_0 + a_1 \sin(x) + b_1 \cos(x) + \dots + a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$$

*sono densi nell'insieme  $C_{2\pi}$  delle funzioni continue e periodiche di periodo  $2\pi$ .*

Una volta scelto il tipo di funzione con la quale approssimare la funzione data, si tratta di stabilire dei criteri per la sua determinazione. In questo corso ci occuperemo soltanto di **interpolazione**, nella quale i parametri del polinomio approssimante sono determinati da vincoli di tipo interpolatorio.

## **2. METODI INTERPOLATORI.**

Abbiamo già accennato al fatto che nel punto  $x_0$  il polinomio di Taylor di grado  $n$  di una funzione coincide con la funzione stessa e con le sue derivate fino all'ordine  $n$ . Questo

tipo di interpolazione è chiamata *interpolazione di Taylor*. Abbiamo già osservato che tale tipo di approssimazione può essere molto scadente specialmente in punti distanti da  $x_0$ . Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che tutte le informazioni sulla funzione da approssimare sono concentrate nel punto  $x_0$ , e non tengono quindi conto dell'andamento della funzione in altri punti dell'intervallo nel quale si intende approssimare.

Un approccio diverso, e spesso più efficiente, è dato dalla interpolazione di Lagrange.

Interpolazione di Lagrange.

Data una funzione  $f(x)$  definita in un intervallo  $[a,b]$  ed un insieme di nodi  $\Delta_n = \{ x_0, x_1, \dots, x_n \}$  tali che  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ , si definisce **polinomio d'interpolazione di Lagrange** il polinomio  $p_n(x) \in \pi_n$  che soddisfa le condizioni d'interpolazione:

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad i=0,1,\dots,n.$$

Tale polinomio esiste ed è unico per ogni insieme  $\Delta_n$  di nodi (tra loro distinti) e per ogni funzione  $f(x)$ . Infatti, esprimendo  $p_n(x)$  in *forma canonica*:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

le condizioni di interpolazione si traducono nel seguente sistema lineare nelle incognite  $a_0, a_1, \dots, a_n$ :

$$a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0)$$

$$a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1)$$

.....

$$a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = f(x_n).$$

Il determinante della matrice del sistema, detto *determinante di Vandermonde*, è:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

ed è non nullo per ogni insieme di nodi distinti. Il sistema ammette quindi una ed una sola soluzione.

A volte sarà conveniente indicare con  $L_{\Delta_n}(f, x)$  l'operatore che associa alla funzione  $f(x)$  il suo polinomio d'interpolazione sui nodi  $\Delta_n$ . Per l'unicità dell'interpolazione (o, se si preferisce, per il *principio di identità dei polinomi*), è chiaro che per ogni  $\Delta_n$  e per ogni polinomio  $q_n \in \pi_n$  si ha:

$$L_{\Delta_n}(q_n, x) = q_n(x)$$

Sul piano pratico non conviene rappresentare il polinomio d'interpolazione nella forma canonica, ma attraverso i seguenti *coefficienti di Lagrange*  $\ell_i(x)$ :

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \in \pi_n$$

per i quali si ha:

$$\ell_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j \\ 1 & \text{per } i = j \end{cases}$$

Si osservi che essi dipendono esclusivamente dai nodi e sono tutti polinomi di grado  $n$ .

Il polinomio d'interpolazione assume quindi la forma:

$$L_{\Delta_n}(f, x) = \sum_{i=0}^n \ell_i(x) f(x_i) \tag{2.1}$$

dalla quale appare evidente che l'operatore  $L_{\Delta_n}(f, x)$  è lineare rispetto ad  $f$ . Il polinomio d'interpolazione scritto in questa forma lo chiameremo **polinomio di Lagrange**.

### Errore dell'interpolazione di Lagrange.

$\Delta_n = \{a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b\}$  in  $[a, b]$ ,

Per dare una valutazione puntuale dell'errore di interpolazione  $f(x) - p_n(x)$  consideriamo un punto  $\bar{x} \in [a, b] \setminus \Delta_n$ , cioè diverso dai nodi  $\Delta_n$ , e con esso costruiamo la funzione:

$$g(x) = f(x) - p_n(x) - \frac{w(x)}{w(\bar{x})} (f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}))$$

dove

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Supponiamo che la funzione  $f(x)$ , e quindi la  $g(x)$ , sia di classe  $C^{n+1}[a,b]$ . Poichè  $g(x)$  si annulla su  $n+2$  punti, i nodi ed il punto  $\bar{x}$ , la sua derivata  $g'(x)$  si annulla in almeno  $n+1$  punti interni all'intervallo  $[a,b]$ . Così la derivata seconda  $g''(x)$  si annulla in almeno  $n$  punti e, così proseguendo, la derivata  $g^{(n+1)}(x)$  si annulla in almeno un punto interno di  $[a,b]$ . Detto  $\bar{\xi}$  tale punto, che risulta dipendere da  $\bar{x}$ , per esso si ha:

$$g^{(n+1)}(\bar{\xi}) = f^{(n+1)}(\bar{\xi}) - \frac{(n+1)!}{w(\bar{x})} (f(\bar{x}) - p_n(\bar{x})) = 0.$$

e quindi  $\forall \bar{x} \in [a,b] \setminus \Delta_n$

$$f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{\xi}) w(\bar{x})}{(n+1)!}.$$

Poichè sui nodi il polinomio  $w(x)$  si annulla, la precedente stima puntuale è valida anche sui nodi e quindi per ogni punto di  $[a,b]$ . Non conoscendo il valore  $\bar{\xi}$  in funzione di  $\bar{x}$ , la formula può essere utilizzata solo maggiorando  $f^{(n+1)}(x)$  su tutto  $[a,b]$ :

$$|f(\bar{x}) - p_n(\bar{x})| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty} |w(\bar{x})|}{(n+1)!}$$

Da quest'ultima si può infine ricavare la stima uniforme:

$$\|f - p_n\|_{\infty} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty} \|w\|_{\infty}}{(n+1)!}. \quad (2.2)$$

Si osservi che la stima dell'errore dipende da due fattori indipendenti tra loro. Il primo,  $\|f^{(n+1)}\|_{\infty}$ , dipende soltanto dalla regolarità della funzione  $f(x)$ ; il secondo  $\|w\|_{\infty}$ , dipende solo dai nodi. E' facile vedere che una maggiorazione brutale del termine  $\|w\|_{\infty}$  è data da  $(n+1)!h^{n+1}$ , dove  $h$  è la massima distanza tra due punti consecutivi dell'insieme  $\{a, x_0, x_1, \dots, x_n, b\}$ . Vale allora la stima:

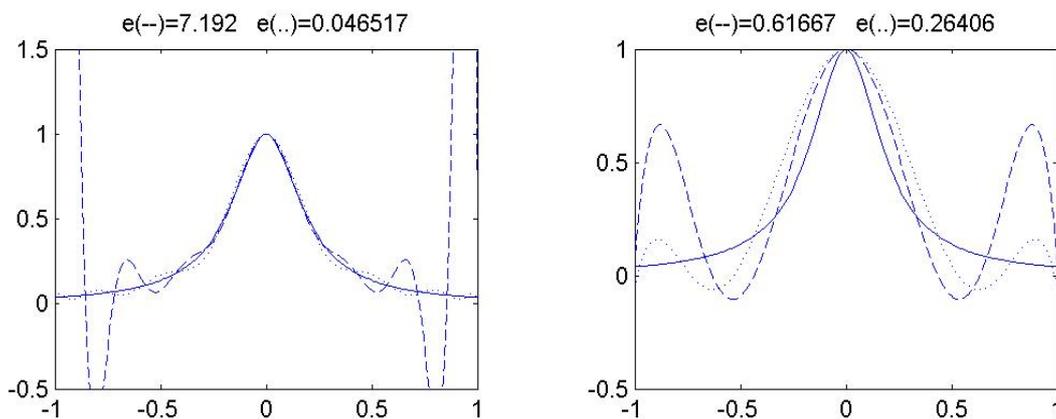
$$\|f - p_n\|_{\infty} \leq \|f^{(n+1)}\|_{\infty} h^{n+1} \quad (2.3)$$

Se, in particolare,  $x_0=a$  e  $x_n=b$ , cioè se ci limitiamo a dare una stima dell'errore all'interno dei nodi di interpolazione, allora il termine  $\|w\|_{[x_0, x_n]} = \max_{[x_0, x_n]} |w(x)|$  può essere maggiorato con  $\frac{1}{4}(n!)h^{n+1}$ , dove  $h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ . In questo caso vale la seguente maggiorazione:

$$\|f - p_n\|_{[x_0, x_n]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{[x_0, x_n]} h^{n+1}}{4(n+1)}. \quad (2.4)$$

Se i nodi sono equidistanti, le precedenti stime di  $\|w\|_\infty$  sono le migliori possibili e quindi (2.3) e (2.4) sono ottimali per aumentare l'errore di interpolazione. A differenza di quello che si potrebbe pensare, la distribuzione di nodi equidistanti non è però la migliore nell'interpolazione con polinomi algebrici. Vedremo infatti che il termine  $\|w\|_\infty$  è minimizzato se i nodi sono gli zeri dei polinomi di Chebyshev relativi all'intervallo  $[a,b]$ . E' tipico della interpolazione su nodi equidistanti il seguente *fenomeno di Runge* dove, al crescere di  $n$ , i polinomi interpolanti aumentano l'oscillazione.

Nelle seguenti figure si interpola la funzione  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$  su 7 e 15 nodi equidistanti (linea tratteggiata) e di Chebyshev (linea punteggiata).



### Polinomi di Chebyshev.

Per ogni numero naturale  $n$  si definisce **polinomio di Chebyshev di grado  $n$**  la seguente funzione definita in  $[-1, 1]$ :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad n=0, 1, \dots$$

Osserviamo innanzitutto che  $\forall n, T_n(x) \in \pi_n$ . Per le note formule sulla somma del coseno si ha:

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

le quali, attraverso il cambio di variabile

$$\varphi = \arccos(x) \quad -1 \leq x \leq 1,$$

forniscono:

$$\cos((n+1)\varphi) + \cos((n-1)\varphi) = 2 \cos(n\varphi) \cos(\varphi)$$

e quindi:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2T_n(x) x.$$

Si ottiene così la **relazione ricorsiva** a tre termini:

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n=1,2,\dots$$

Poichè  $T_0(x)=1$  e  $T_1(x)=x$ , si vede facilmente che  $T_n(x) \in \pi_n$  per ogni  $n$ , ed inoltre il **coefficiente principale** di  $T_n(x)$  è  $k_n=2^{n-1}$ .

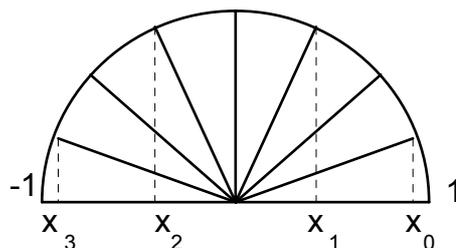
Il polinomio  $T_n(x)$  è ovviamente definito su tutto  $\mathbb{R}$ , ma soltanto in  $[-1,1]$  coincide con la funzione  $\cos(n \arccos(x))$ .

Verifichiamo ora che, per ogni  $n$ ,  $T_n(x)$  ammette  $n$  radici reali e distinte in  $(-1,1)$ . Poichè il coseno si annulla sui punti  $z_k = (2k-1)\frac{\pi}{2}$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , la funzione  $\cos(n \arccos(x))$  si annullerà sui punti  $x_k$  tali che  $n \arccos(x_k) = z_k$ . Quindi, restringendoci ai valori dell'arccoseno in  $[0,\pi]$ ,

$$\arccos(x_k) = \frac{(2k-1)\pi}{n} \quad k=1,2,\dots,n$$

e

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right) \quad k=1,2,\dots,n.$$



radici di  $T_4(x)$

Per quanto riguarda i **massimi e minimi** di  $T_n(x)$ , essi sono raggiunti in quei punti  $y_k$  per i quali  $\arccos(y_k) = k\pi/n$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Restringendoci ancora ai valori dell'arccoseno in  $[0, \pi]$ , si ha:

$$\arccos(y_k) = \frac{k\pi}{n} \quad k=0,1,\dots,n$$

e quindi:

$$y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k=0,1,\dots,n.$$

Su tali punti estremali si ha:

$$T_n(y_k) = (-1)^k \quad k=0,1,\dots,n.$$

Sia ora  $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$  il **polinomio monico di Chebyshev** la cui norma è:

$$\|\tilde{T}_n(x)\| = \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n(x)\| = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (2.5)$$

e dimostriamo per esso la seguente proprietà di minimo.

**Teorema 5.3:** *Tra tutti i polinomi monici di grado  $n$ , il polinomio  $\tilde{T}_n(x)$  possiede la minima norma lagrangiana nell'intervallo  $[-1, 1]$ .*

Dim: Supponiamo che esista un polinomio monico  $p_n(x)$  di norma inferiore a  $\tilde{T}_n(x)$

$$\|p_n(x)\| < \|\tilde{T}_n(x)\|.$$

Poichè i massimi e minimi di  $\tilde{T}_n(x)$  si alternano sui punti estremali, si avrà:

$$\tilde{T}_n(y_0) > p_n(y_0)$$

$$\tilde{T}_n(y_1) < p_n(y_1)$$

....

e così di seguito, in modo alternato, fino al punto  $y_n$ .

Il polinomio  $\tilde{T}_n(x) - p_n(x)$  cambia segno  $n$  volte e quindi possiede  $n$  zeri. Essendo differenza di due polinomi monici di grado  $n$ , esso è di grado al più  $n-1$  e quindi coincide con la funzione nulla. I due polinomi sono dunque uguali ma questo contraddice la supposizione che abbiano norma diversa. In conclusione non esiste polinomio monico di norma inferiore alla norma di  $\tilde{T}_n(x)$ .

Questo risultato può essere utilizzato, in riferimento alla formula (2.2), per la scelta ottimale dei nodi di interpolazione in un generico intervallo  $[a,b]$ . Consideriamo a tale scopo il cambio di variabile

$$x = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)t \quad t \in [-1,1]$$

che trasforma  $[-1,1]$  in  $[a,b]$ . Il polinomio  $w(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$  diventa:

$$w(x)=w'(t)=\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)^{n+1}(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_n)$$

e quindi:

$$\|w(x)\|_{[a,b]} = \|w'(t)\|_{[-1,1]} = \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)^{n+1} \|(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_n)\|_{[-1,1]} \quad (2.6)$$

Poichè il termine  $\|(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_n)\|_{[-1,1]}$  risulta minimo quando i punti  $t_k$  sono gli zeri di  $\tilde{T}_{n+1}(t)$ , il termine  $\|w(x)\|_{[a,b]}$  sarà minimo sui punti

$$x_k = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)t_k \quad t_{k-1} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{n+1}\right) \quad k=1,2,\dots,n+1.$$

Per la (2.5) e (2.6) si avrà infine:

$$\|w(x)\|_{[a,b]} = \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)^{n+1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2 \cdot 4^n}(b-a)^{n+1}$$

### Stabilità dell'interpolazione di Lagrange.

Consideriamo i due polinomi,  $p_n(x)$  e  $\tilde{p}_n(x)$ , che interpolano sugli stessi nodi  $x_i$   $i=0,1,\dots,n$ , dei valori  $y_i$  e dei valori perturbati  $\tilde{y}_i$  rispettivamente.

Utilizzando la rappresentazione (2.1) per il polinomio di interpolazione si ottiene

$$|p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| = \left| \sum_{i=0}^n \ell_i(x)(y_i - \tilde{y}_i) \right| \leq \max_i |y_i - \tilde{y}_i| \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)|.$$

Definito il **numero di Lebesgue**

$$\lambda_n = \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)|,$$

si ottiene la stima

$$\max_{a \leq x \leq b} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq \max_i |y_i - \tilde{y}_i| \lambda_n$$

che rappresenta la perturbazione subita dal polinomio interpolante in funzione della perturbazione sui valori da interpolare. La costante di Lebesgue risulta essere l'indice di condizionamento del processo di interpolazione su quei nodi.

In merito ai valori dei numeri di Lebesgue in funzione dei nodi, vale il seguente teorema.

**Teorema di Natanson.** *Per ogni successione di nodi, esiste una costante c tale che i corrispondenti numeri di Lebesgue soddisfano la relazione:*

$$\lambda_n > \frac{2}{\pi} \log(n+1) - c$$

*In particolare sui nodi di Chebyshev si ha:*

$$\lambda_n < \frac{2}{\pi} \log(n+1) + c.$$

Ne ricaviamo che per ogni scelta dei nodi, l'indice di condizionamento cresce e, in particolare, la scelta dei nodi di Chebyshev e' quella ottimale.

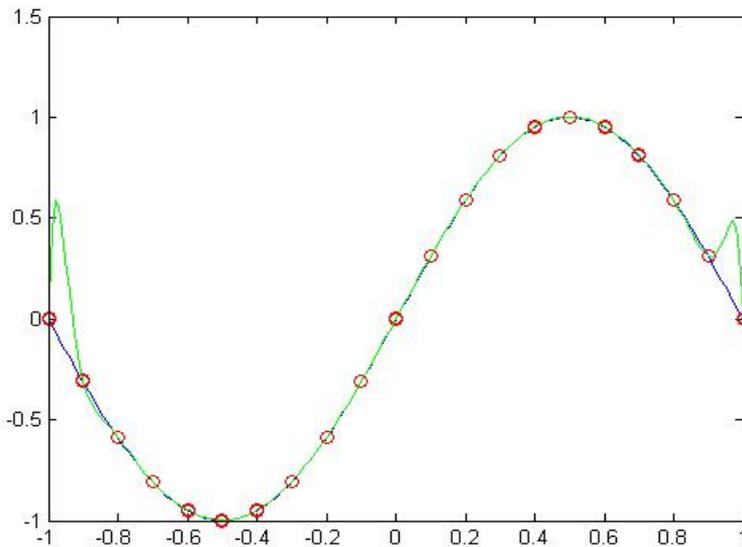
Per i nodi equidistanti vale la relazione

$$\lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \cdot \log(n)}$$

che rivela una possibile instabilità al crescere di n, come evidenziato nel seguente esempio.

*Esempio:* Data la funzione  $\sin(\pi x)$ , si considerino 21 nodi equidistanti  $x_i$  nell'intervallo  $[-1,1]$  ed i corrispondenti valori  $y_i = \sin(\pi x_i)$ . Da questi ricaviamo dei valori  $\tilde{y}_i$  attraverso una perturbazione "casuale" dei valori  $y_i$  di modulo non superiore a 0.005.

In figura si vede che il polinomio  $p_n(x)$ , che interpola i valori esatti  $y_i$ , ed il polinomio  $\tilde{p}_n(x)$ , che interpola i valori perturbati  $\tilde{y}_i$ , differiscono di una quantità di modulo molto superiore alla perturbazione sui dati.



Interpolazione di Hermite e di Birkhoff:

Supponiamo che la funzione  $f(x)$  sia di classe  $C^1[a,b]$ . Dato un insieme di nodi  $\Delta_n = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  in  $[a,b]$ , si definisce **polinomio d'interpolazione di Hermite** il polinomio  $p_{2n+1}(x) \in \pi_{2n+1}$  tale che:

$$p_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \quad i=0,1,\dots,n.$$

$$p'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \quad i=0,1,\dots,n.$$

Indicheremo con  $H_{\Delta_n}(f,x)$  l'operatore che associa alla funzione derivabile  $f(x)$  il polinomio d'interpolazione di Hermite sui nodi  $\Delta_n$ . E' facile verificare che  $H_{\Delta_n}(f,x)$  si può scrivere nella forma:

$$H_{\Delta_n}(f,x) = \sum_{i=0}^n h_i(x)f(x_i) + \sum_{i=0}^n \bar{h}_i(x)f'(x_i)$$

dove

$$h_i(x) := \ell_i^2(x)(1 - 2(\ell_i'(x_i)(x-x_i))) \in \pi_{2n+1}$$

$$\bar{h}_i(x) := \ell_i^2(x)(x-x_i) \in \pi_{2n+1} \quad i=0,1,\dots,n.$$

A tale scopo basta osservare che i due insiemi di polinomi soddisfano le condizioni:

$$h_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j \\ 1 & \text{per } i = j \end{cases} \quad h'_i(x_j) = 0 \quad \forall i, j$$

e

$$\bar{h}_i(x_j)=0 \quad \forall i, j \qquad \bar{h}'_i(x_j)=\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j \\ 1 & \text{per } i = j \end{cases} .$$

E' anche immediato verificare che il polinomio di Hermite è unico. Se infatti  $q_{2n+1}(x) \in \pi_{2n+1}$  fosse un altro polinomio soddisfacente le condizioni

$$q_{2n+1}(x_i)=f(x_i) \qquad i=0,1,\dots,n.$$

$$q'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i) \qquad i=0,1,\dots,n,$$

la differenza dei polinomi derivati  $p'_{2n+1}(x)-q'_{2n+1}(x)$  si annullerebbe sui nodi e su altri  $n$  punti intercalati tra i nodi. In totale esso avrebbe  $2n+1$  zeri ed, essendo di grado  $2n$ , dovrebbe coincidere con il polinomio nullo. Di conseguenza i due polinomi  $p_{2n+1}(x)$  e  $q_{2n+1}(x)$  dovrebbero differire per una costante, ma questa costante deve essere nulla.

Per quanto riguarda l'errore dell'interpolazione di Hermite, essa si può ricavare, per funzioni di classe  $C^{2n+2}[a,b]$  in maniera del tutto simile a quanto fatto per l'interpolante di Lagrange. Si considera un punto  $\bar{x} \in [a,b]$ , diverso dai nodi  $\Delta_n$ , e con esso si costruisce la funzione:

$$g(x) = f(x) - p_{2n+1}(x) - \frac{w^2(x)}{w^2(\bar{x})} (f(\bar{x}) - p_{2n+1}(\bar{x}))$$

dove

$$w(x)=(x-x_0)(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n).$$

Poichè  $g(x)$  si annulla su  $n+2$  punti, la funzione  $g'(x)$  si annulla su (almeno)  $n+1$  punti diversi dai nodi e da  $\bar{x}$ . D'altra parte le condizioni di interpolazione sulla derivata assicurano che  $g'(x)$  si annulla anche sui nodi e quindi su un totale di almeno  $2n+2$  punti distinti. Derivando successivamente la funzione  $g(x)$  si conclude che  $g^{(2n+2)}(x)$  si annulla in un punto  $\bar{\xi}$ , dipendente da  $\bar{x}$ , sul quale si ha:

$$g^{(2n+2)}(\bar{\xi}) = f^{(2n+2)}(\bar{\xi}) - \frac{(2n+2)!}{w^2(\bar{x})} (f(\bar{x}) - p_{2n+1}(\bar{x})) = 0.$$

e quindi  $\forall \bar{x}$

$$f(\bar{x}) - p_{2n+1}(\bar{x}) = \frac{f^{(2n+2)}(\bar{\xi}) w^2(\bar{x})}{(2n+2)!}.$$

Dalla precedente stima puntuale dell'errore si può ricavare la stima uniforme:

$$\|f - p_{2n+1}\|_{\infty} \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_{\infty} \|w^2\|_{\infty}}{(2n+2)!}$$

Analogamente a quanto fatto per i polinomi di Lagrange, sia  $h$  la massima distanza tra due punti consecutivi dell'insieme  $\{a, x_0, x_1, \dots, x_n, b\}$ . Poichè  $\|w\|_{\infty} \leq (n+1)!h^{n+1}$ , la precedente stima fornisce:

$$\|f - p_{2n+1}\|_{\infty} \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_{\infty} ((n+1)!)^2 h^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Se  $x_0=a$  e  $x_n=b$ , la norma  $\|w\|_{[x_0, x_n]} := \max_{[x_0, x_n]} |w(x)|$  può essere maggiorata con  $\frac{1}{4}(n!)h^{n+1}$ , dove  $h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ . In questo caso vale la seguente maggiorazione:

$$\|f - p_{2n+1}\|_{[x_0, x_n]} \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_{[x_0, x_n]} (n!)^2 h^{2n+2}}{16(2n+2)!}.$$

Consideriamo ora un tipo di interpolazione più generale sui nodi  $\Delta_n$ . Supponiamo che su ciascun nodo  $x_i$  si conoscano  $i$  valori della  $f(x)$  e delle derivate successive fino all'ordine  $s_i$  e supponiamo che sia  $r = \sum_{i=0}^n (s_i + 1)$  il numero totale di valori noti per la  $f(x)$  e per le sue derivate su tutti i punti.

Si definisce **polinomio di interpolazione di Birkhoff** di  $f(x)$ , il polinomio  $p_{r-1}(x) \in \pi_{r-1}$  che soddisfa le seguenti  $r$  condizioni interpolatorie:

$$p_{r-1}^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) \quad k = 0, 1, \dots, s_i \quad \text{per } i=0, 1, \dots, n$$

Si può dimostrare che tale polinomio, che può in particolare essere il polinomio di Lagrange o di Hermite, esiste ed è unico. Nel prossimo punto vedremo come ricavarlo.

### Differenze divise e polinomio di Newton.

Data un insieme di punti  $\{x_i\}$  ed i corrispondenti valori della funzione  $f(x)$ , si definisce, per ciascuno punto, **differenza divisa di ordine zero** il termine:

$$f[x_i] := f(x_i)$$

e **differenza divisa di ordine uno** il termine:

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}.$$

Si definiscono ricorsivamente le **differenze divise di ordine k** i rapporti:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

**Teorema di Newton:** Sia data la funzione  $f(x)$ . Per ogni intero  $n$  e per ogni insieme di  $n+1$  punti distinti  $x_0, x_1, \dots, x_n$  vale la seguente identità:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ & \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ & + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]. \quad \forall x \end{aligned}$$

Dim. La uguaglianza è vera per  $n=0$ , infatti in tal caso si riduce a

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x, x_0].$$

Supponiamo che relazione sia vera per  $n=k-1$ :

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ & \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-2})f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] \\ & + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})f[x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}], \end{aligned} \tag{2.7}$$

dimostriamo che è vera per  $n=k$ . Dalla definizione di differenza divisa di ordine  $k+1$  si ha:

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_k] := \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_k] - f[x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x}$$

e quindi

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] = (x-x_k)f[x, x_0, x_1, \dots, x_k] + f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

che sostituita in (2.7) fornisce la tesi.

La parte polinomiale:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots$$

$$\dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

della (2.7) è detta **polinomio di Newton**. Ogni funzione  $f(x)$  si può quindi esprimere come somma del polinomio di Newton e di un resto:

$$f(x) = p_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]. \quad (2.8)$$

Evidentemente il polinomio di Newton  $p_n(x)$  interpola  $f(x)$  sui nodi  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  e fornisce quindi una ulteriore rappresentazione del polinomio d'interpolazione di Lagrange nella seguente **base triangolare** di polinomi monici:

$$1$$

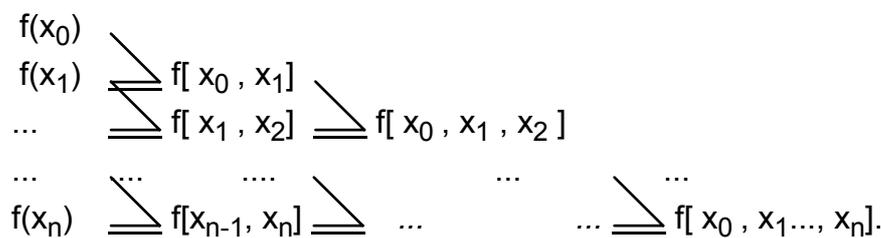
$$(x-x_0)$$

$$(x-x_0)(x-x_1)$$

$$\dots$$

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

I coefficienti sono dati dalle differenze successive che si possono facilmente calcolare secondo lo schema:



Un altro vantaggio di rappresentare il polinomio d'interpolazione nella forma di Newton, risiede nel fatto che se si vuole innalzare il grado del polinomio inserendo un ulteriore nodo d'interpolazione  $x_{n+1}$ , il polinomio  $p_{n+1}(x)$  assume la forma:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}].$$



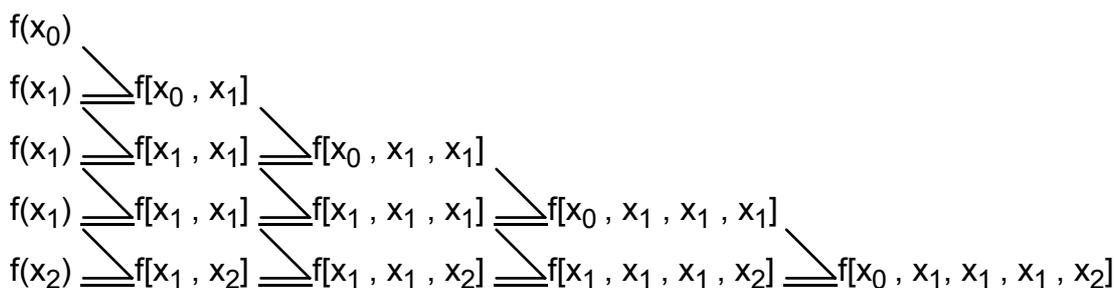
$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] := \begin{cases} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} & \text{per } x_0 = x_1 = \dots = x_n \\ \frac{f[x_0, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n] - f[x_0, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n]}{x_s - x_r} & \text{per } x_r \neq x_s \end{cases}$$

Con la precedente definizione possiamo generalizzare il polinomio di Newton al caso di nodi multipli che corrispondono ai vincoli interpolatori sui valori delle derivate successive. In particolare il polinomio d'interpolazione di Hermite si ottiene considerando tutti i nodi doppi. Se nel nodo  $x_i$  si interpolano le derivate fino all'ordine  $k$ , allora il nodo va considerato di molteplicità  $k+1$ .

Come esempio consideriamo i nodi  $x_0, x_1, x_2$  e calcoliamo l'interpolante sui valori  $f(x_0), f(x_1), f'(x_1), f''(x_1), f(x_2)$ . Trattandosi di 5 vincoli il polinomio dovrà essere di grado 4. Esso si rappresenta come polinomio di Newton sui nodi:  $\{x_0, x_1, x_1, x_1, x_2\}$  ed assume quindi la forma:

$$p_4(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)^2f[x_0, x_1, x_1, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)^3f[x_0, x_1, x_1, x_1, x_2]$$

dove le differenze divise sono calcolate secondo lo schema:



### Interpolazione con polinomi a tratti.

Fino ad ora abbiamo considerato esclusivamente l'interpolazione con polinomi algebrici, ed abbiamo visto che, al crescere del numero dei nodi, la convergenza è assicurata solo sotto particolari ipotesi sulla regolarità della funzione e sulla distribuzione dei nodi stessi nell'intervallo di interpolazione (si ricordi il fenomeno di Runge). Per ottenere procedimenti convergenti si consideri la seguente strategia di **interpolazione di Lagrange a tratti**.

Per ogni  $n$  fissato e per ogni  $m$ , consideriamo l'insieme  $\Delta_{nm}$  costituito da  $nm+1$  nodi, non necessariamente equidistanziati, con  $x_0=a$  e  $x_{nm}=b$  e sia  $h$  la massima distanza tra due nodi consecutivi. Poi raggruppiamoli in gruppi di  $n+1$  nodi consecutivi che danno luogo alla seguente sequenza di  $m$  intervalli:

$$I_1=[x_0, x_n], I_2=[x_n, x_{2n}], \dots, I_m=[x_{(m-1)n}, x_{nm}].$$

Se nell'intervallo  $[a,b]$  ci sono dei punti nei quali la funzione o qualche derivata di ordine  $\leq n+1$  e' discontinua, possiamo sempre costruire  $\Delta_{nm}$  in modo che tali discontinuita' rimangano sui nodi che separano gli intervalli  $I_k$ . In tal modo su ogni  $I_k$  la funzione risulterà di classe almeno  $C^{n+1}$ .

Su ciascuno di questi intervalli  $I_k$  costruiamo quindi il polinomio di Lagrange di grado  $n$  sugli  $n+1$  nodi in esso contenuti e indichiamolo con  $p_{k,n}(x)$ . In base alla formula (2.4) l'errore su ciascun intervallo  $I_k$  e' maggiorato da:

$$\|f-p_{k,n}(x)\|_{I_k} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{I_k} h^{n+1}}{4(n+1)}$$

Indicata con  $P_{\Delta_{nm}}(x)$ ,  $x \in [a,b]$ , la funzione *polinomiale a tratti* costituita da tutti i tratti  $p_{k,n}(x)$ , si avra' la seguente stima dell'errore globale su  $[a,b]$ :

$$\|f-P_{\Delta_{nm}}(x)\|_{[a,b]} \leq \frac{\max_k \|f^{(n+1)}\|_{I_k} h^{n+1}}{4(n+1)}$$

che è un infinitesimo di ordine  $n+1$  per  $m \rightarrow \infty$  ed  $h \rightarrow 0$ .

Possiamo quindi concludere con il seguente teorema:

**Teorema.** *Per ogni funzione  $f(x)$  di classe  $C^{n+1}[a,b]$  a tratti si puo' costruire una successione di interpolanti di Lagrange a tratti, di grado fissato  $n$  e passo  $h$ , che converge uniformemente ad  $f(x)$  per  $h \rightarrow 0$ . L'ordine di convergenza è pari a  $n+1$ .*

In particolare, per  $n=3$ , i polinomi interpolanti a tratti prendono il nome di **cubiche di Lagrange**. Per funzioni  $f(x) \in C^4[a,b]$ , l'errore è  $O(h^4)$ .

In modo analogo si può definire l' **interpolazione di Hermite a tratti** nella quale, fissato  $n$ , su ogni sottointervallo  $I_i$  si considera l'interpolante di Hermite di grado  $2n+1$  sui nodi di  $I_i$ . Con gli stessi vincoli richiesti in precedenza sulla costruzione dei nodi  $\Delta_{nm}$  in relazione alle eventuali irregolarita' della funzione  $f(x)$ , vale il seguente teorema:

**Teorema 5.5.** *Per ogni funzione  $f(x)$  di classe  $C^{2n+2}[a,b]$  a tratti si puo' costruire una successione di interpolanti di Hermite a tratti, di grado fissato  $2n+1$  e passo  $h$ , che converge uniformemente ad  $f(x)$  per  $h \rightarrow 0$ . L'ordine di convergenza è pari a  $2n+2$ .*

In particolare, per  $n=1$ , i polinomi interpolanti a tratti sono di grado 3 e prendono il nome di **cubiche di Hermite**. Per funzioni  $f(x) \in C^4[a,b]$ , l'errore è  $O(h^4)$ .

Approssimazione "shape preserving" di dati sperimentali.

Le cubiche di Hermite sono particolarmente adatte alla costruzione di funzioni *liscie* (cioè di classe  $C^1$ ) che interpolano dati sperimentali *conservandone la forma*. Più precisamente, assegnato un insieme di valori  $y_i$  su un insieme discreto di nodi  $x_i$ , si cerca una funzione che interpoli tali valori e che conservi il carattere monotono tra nodi consecutivi. In altre parole, se due nodi consecutivi hanno carattere *crescente*, *decrescente* o *costante*, tale deve essere l'interpolante.

Si osservi intanto che la conservazione della monotonia su nodi consecutivi implica la conservazione della proprietà di massimo o minimo relativo sui nodi adiacenti. Cioè: se i valori assegnati a 3 nodi consecutivi soddisfano le relazioni  $y_{i-1} \leq y_i$  e  $y_i \geq y_{i+1}$ , il punto  $x_i$  sarà punto di massimo relativo anche per l'interpolante

Si osservi inoltre che essendo assegnati soltanto i valori sui nodi potrei risolvere il problema prendendo l'approssimazione lineare a tratti. E' evidente che essa conserva la forma dei dati, ma globalmente non è una funzione di classe  $C^1$ .

La costruzione di funzioni *liscie* che interpolino i dati *conservando la forma* si ottiene facilmente usando cubiche di Hermite attraverso la seguente assegnazione dei valori delle derivate  $\xi_i$  dell'interpolante sui nodi.

Nodi interni: Se il nodo  $x_i$  è un punto di massimo o minimo relativo si pone  $\xi_i=0$ .  
 Se il nodo  $x_i$  non è un punto di estremo relativo, il valore della derivata è posto pari alla media dei due rapporti incrementali destro e sinistro:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)$$

Nodi estremi: Il valore della derivata su un estremo, per esempio  $x_0$ , è posta pari al valore  $\xi_0$  per il quale la media tra  $\xi_0$  ed il valore  $\xi_1$ , già assegnato alla derivata in  $x_1$ , sia pari al rapporto incrementale tra  $x_0$  e  $x_1$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\xi_1 + \xi_0}{2}$$

e quindi

$$\xi_0 = 2 \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \xi_1$$

Analogamente, se  $x_m$  è l'ultimo nodo si porrà

$$\xi_m = 2 \frac{y_m - y_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} - \xi_{m-1}$$

Siamo ora in condizioni di costruire l'interpolante cubica a tratti di Hermite sui nodi  $x_i$  per ciascuno dei quali disponiamo dei valori  $y_i$  e delle derivate  $\xi_i$ . La funzione MATLAB relativa all'interpolazione "shape preserving" è `pchip.m` (piecewise cubic Hermite interpolation polynomial) che richiede in input i valori  $x_i$  e  $y_i$ .

Interpolazione spline.

Consideriamo un insieme di nodi  $\Delta_m = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$  ed i corrispondenti sottointervalli

$$I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_m = [x_{(m-1)}, x_m].$$

Si definisce **funzione spline** di grado  $n$  su  $\Delta_m$ , ogni funzione  $s(x)$  del seguente sottospazio di funzioni:

$$S_{\Delta_m}^n = \{s(x) \mid s(x)|_{I_i} \in \pi_n \quad i=1, \dots, m; \text{ e } s(x) \in C^{n-1}[a, b]\}.$$

Una spline di grado  $n$  è quindi una funzione polinomiale a tratti di grado  $n$ , che risulta globalmente di classe  $C^{n-1}[a, b]$ , cioè tale che sui nodi interni siano soddisfatte le seguenti condizioni sulle derivate sinistre e destre:

$$\begin{aligned} s(x_i)_- &= s(x_i)_+ \\ s'(x_i)_- &= s'(x_i)_+ \\ &\dots \\ s^{(n-1)}(x_i)_- &= s^{(n-1)}(x_i)_+ \quad i=1, 2, \dots, m-1 \end{aligned}$$

In totale esse forniscono  $n(m-1)$  condizioni di regolarità. D'altra parte, su ciascuno degli  $m$  sottointervalli il generico polinomio di grado  $n$  dipende da  $n+1$  parametri. Questi  $m(n+1)$  parametri devono soddisfare le  $n(m-1)$  condizioni precedenti ed è quindi ragionevole aspettarsi che la dimensione del sottospazio  $S_{\Delta_m}^n$  sia  $m(n+1) - n(m-1) = m+n$ . Una sua base si può trovare attraverso la seguente funzione di Peano:

$$(x - \bar{x})_+^n = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq \bar{x} \\ (x - \bar{x})^n & \text{per } x \geq \bar{x} \end{cases}$$

che è di classe  $C^{n-1}[a, b]$  per ogni punto  $\bar{x}$ .

Le  $m+n$  funzioni:

$$1, x, \dots, x^{n-1}, (x-x_0)_+^n, (x-x_1)_+^n, \dots, (x-x_{m-1})_+^n$$

sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per  $S_{\Delta_m}^n$ . Si ha quindi:

$$\dim(S_{\Delta_m}^n) = m+n.$$

Volendo quindi utilizzare le spline  $S_{\Delta_m}^n$  per un processo di interpolazione sui nodi stessi della spline  $\Delta_m = \{a=x_0 < x_1 < \dots < x_m=b\}$  (che sono  $m+1$ ) rimangono, in linea di principio,  $m+n-(m+1)=n-1$  parametri liberi. Per individuare univocamente la spline d'interpolazione bisogna quindi imporre ulteriori  $n-1$  condizioni che possono essere dettate da varie esigenze.

Consideriamo, in particolare, il caso delle **spline cubiche**  $S_{\Delta_m}^3$  ottenute per  $n=3$ .

Poichè  $\dim(S_{\Delta_m}^3)=m+3$ , imponendo le condizioni di interpolazione sui nodi  $\Delta_m$  rimangono 2 condizioni da imporre per determinare univocamente la spline cubica d'interpolazione. Si definiscono così le seguenti classi di spline cubiche:

**spline naturali** per  $s''(x_0)=s''(x_m)=0$

**spline periodiche** per  $s'(x_0)=s'(x_m)$  ,  $s''(x_0)=s''(x_m)$ .

**spline cubiche complete** per  $s'(x_0)$  e  $s'(x_m)$  assegnati attraverso la cubica che interpola rispettivamente in

$x_0, x_1, x_2, x_3$  e  $x_{m-3}, x_{m-2}, x_{m-1}, x_m$

**spline "not a knot"** imponendo che in  $x_1$  e  $x_{m-1}$  la saldatura dei tratti cubici sia di classe  $C^3$ .

Come per le interpolazioni cubiche a tratti di Lagrange e di Hermire, per le spline cubiche vale il seguente teorema.

**Teorema di convergenza.** Se la funzione  $f(x) \in C^4[a,b]$ , l'errore è  $O(h^4)$  dove  $h$  e' la massima distanza tra i nodi. Piu' in generale valgono le seguenti stime per le derivate successive

$$\|f^{(k)}(x)-s^{(k)}(x)\|_{[x_0,x_m]} \leq C_k \|f^{(4)}\|_{[x_0,x_m]} h^{4-k} \quad k=0,1,2,3$$

Proprietà di minimo di alcuni tipi di spline cubiche d'interpolazione.

Certi tipi di splines cubiche godono della seguente proprietà di "minima energia" o di "minima curvatura".

**Teorema :** Tra tutte le funzioni  $g(x) \in C^2[a,b]$  che interpolano i dati  $f_0, f_1, \dots, f_m$  sui nodi  $\Delta_m = \{a=x_0 < x_1 < \dots < x_m=b\}$  la spline cubica naturale  $s(x)$  minimizza il funzionale:

$$\int_a^b [g''(t)]^2 dt .$$

Dim. E' sufficiente dimostrare che vale l'uguaglianza:

$$\int_a^b [g''(t)]^2 dt = \int_a^b [s''(t)]^2 dt + \int_a^b [g''(t) - s''(t)]^2 dt .$$

Poichè si ha banalmente:

$$\int_a^b [g''(t) - s''(t)]^2 dt = \int_a^b [g''(t)]^2 dt - \int_a^b [s''(t)]^2 dt - 2 \int_a^b [g''(t) - s''(t)]s''(t)dt ,$$

è sufficiente dimostrare che

$$\int_a^b [g''(t) - s''(t)]s''(t)dt = 0 .$$

A questo scopo scomponiamo l'integrale nel seguente modo:

$$\int_a^b [g''(t) - s''(t)]s''(t)dt = \sum_{i=0}^{m-1} I_i$$

$$\text{dove } I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g''(t) - s''(t)]s''(t)dt .$$

Integrando per parti si ottiene:

$$I_i = [g'(t) - s'(t)]s''(t) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g'(t) - s'(t)]s'''(t)dt .$$

Poichè  $s'''(t)$  è costante e  $g(x_i) - s(x_i) = 0 \quad \forall i$ , il secondo integrale è nullo.

Ricomponendo l'integrale si ottiene allora:

$$\sum_{i=0}^{m-1} I_i = \sum_{i=0}^{m-1} [g'(t) - s'(t)]s''(t) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = [g'(x_m) - s'(x_m)]s''(x_m) - [g'(x_0) - s'(x_0)]s''(x_0) . \quad (2.10)$$

Poichè  $s''(x_m) = s''(x_0) = 0$ , si ha  $\sum_{i=0}^{m-1} I_i = 0$  e quindi il teorema è dimostrato.

Due teoremi analoghi possono essere dimostrati a partire dalla relazione (2.10)

**Teorema:** Tra tutte le funzioni  $g(x) \in C^2[a, b]$  che interpolano i dati  $f_0, f_1, \dots, f_m$  sui nodi  $\Delta_m = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$  la spline cubica definita attraverso le seguenti due ulteriori condizioni d'interpolazione (tipo Hermite)  $s'(x_m) = g'(x_m)$  e  $s'(x_0) = g'(x_0)$  minimizza il funzionale:

$$\int_a^b [g''(t)]^2 dt .$$

**Teorema:** Tra tutte le funzioni  $g(x) \in C^2[a,b]$  che interpolano i dati  $f_0, f_1, \dots, f_m$  sui nodi  $\Delta_m = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$  e tali che  $g'(x_m) = g'(x_0)$ , la spline periodica minimizza il funzionale:

$$\int_a^b [g''(t)]^2 dt.$$

Le dimostrazioni di entrambi i teoremi sono identiche alla precedente fino all'espressione (2.10) dalla quale si conclude in maniera immediata.

Interpolazione trigonometrica. La trasformata rapida di Fourier (FFT).

Consideriamo le funzioni  $f(x)$  periodiche di periodo  $2\pi$  ristrette all'intervallo  $[-\pi, \pi]$  e interpoliamole con i polinomi trigonometrici:

$$t_{2n+1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

su un insieme di punti:  $\Delta_{2n} = \{x_{-n} < x_{-n+1} < \dots < x_0 < x_1 < \dots < x_n\} \subset [-\pi, \pi]$ .  
Per mezzo delle formule di Eulero

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

si ricava:

$$t_{2n+1}(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

dove:

$$c_0 = a_0 \quad e \quad c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{se } k \geq 1 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{se } k \leq -1 \end{cases} \quad (2.11)$$

In questo modo le condizioni di interpolazione  $t(x_j) = f(x_j) \quad j = -n, \dots, 0, \dots, n$ , portano al sistema lineare:

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx_j} = f(x_j) \quad j = -n, \dots, 0, \dots, n.$$

Moltiplicando la  $j$ -esima equazione per  $e^{-inx_j}$  si ottiene:

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{i(k+n)x_j} = e^{-inx_j} f(x_j) \quad j = -n, \dots, 0, \dots, n.$$

Ponendo infine  $y_j = e^{ix_j}$ , il determinante del sistema è un determinante di Vandermonde con coefficienti distinti e quindi l'interpolazione trigonometrica ammette soluzione unica per ogni  $f(x)$ .

Nel caso di nodi equidistanti, vale il seguente teorema:

**Teorema 5.6.** Per ogni funzione  $f$  definita in  $[-\pi, \pi]$  i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  del polinomio trigonometrico d'interpolazione

$$t_{2n+1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

sui nodi equidistanti

$$x_j = \frac{2\pi j}{2n+1} \quad \text{per } j=-n, \dots, 0, \dots, n$$

sono dati da:

$$a_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f_j \quad (2.12)$$

$$a_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f_j \cos\left(\frac{2\pi k j}{2n+1}\right) \quad k=1, \dots, n \quad (2.13)$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f_j \sin\left(\frac{2\pi k j}{2n+1}\right) \quad k=1, \dots, n \quad (2.14)$$

Le relazioni (2.12)-(2.14) che ai  $2n+1$  valori assegnati  $f_j$ , associano i  $2n+1$  coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  costituiscono la **trasformata discreta di Fourier** o, più brevemente, **DFT (Discrete Fourier Transform)**.

Viceversa la relazione

$$f_j = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{2\pi k j}{2n+1}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k j}{2n+1}\right)$$

che associa ai coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  i valori  $f_j$  è detta **antitrasformata discreta di Fourier**, **IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform)** :

Qualche volta (per esempio nel MATLAB), la trasformata si esprime in forma esponenziale e fornisce i coefficienti complessi  $c_k$  che, come abbiamo visto, sono legati ai coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  dalla (2.11).

Detto  $N=2n+1$ , osserviamo che la DFT richiede  $N$  moltiplicazioni per il calcolo di ciascun coefficiente, per un totale di  $N^2$  moltiplicazioni. Confrontato con la complessità computazionale della risoluzione di un sistema lineare di dimensione  $N$ , che è dell'ordine di  $N^3/3$ , l'uso della DFT rappresenta già un vantaggio in termini di tempo di calcolo. Ulteriori riduzioni sono intuibili a causa della simmetria e di altre proprietà delle funzioni

circolari. Già nel 1866 Gauss proponeva un metodo di calcolo che riduceva, in qualche misura, il numero di operazioni. Ma solo negli anni '60 si otteneva un algoritmo ottimale, dovuto a Tukey e Cooley, che riduce il numero di moltiplicazioni da  $N^2$  a  $N \cdot \log_2 N$ . Tale algoritmo è noto come **trasformata rapida di Fourier** o, in breve, **FFT (Fast Fourier Transform)**. Si osservi che per un insieme di 1024 dati la FFT riduce il numero di moltiplicazioni di un fattore 100.

Una importante applicazione della FFT è la ricerca di cicli e sottocicli in un insieme di  $N=(2n+1)$  dati sperimentali  $f_i$  quali, per esempio, il campionamento di un segnale. Ciò si fa attraverso il calcolo dei numeri  $|c_k|^2$  o equivalentemente di  $1/4(a_k^2 + b_k^2)$ ,  $k=1, \dots, n$  che costituiscono il **periodogramma** dei dati. La presenza di qualche picco in corrispondenza a certi valori di  $k$  corrisponde alla presenza di una forte componente di frequenza  $k$ , cioè tale che realizza  $k$  cicli periodici sugli  $N$  dati. Il numero  $N/k$  è la periodicità di quella componente.