# 1 FORMULE DI QUADRATURA

Sia $f \in C^0([a,b])$. Consideriamo il problema del calcolo dell' integrale

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx$$

e più in generale di integrali pesati del tipo

$$I(f) := \int_a^b w(x)f(x)dx,$$

dove $w(x)$ è una funzione peso che gode delle seguenti proprietà:

1) $w(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$,

2) per ogni numero naturale $r$ esiste finito $\int_a^b w(x)x^r dx$ (tali integrali sono detti i "momenti" di $w(x)$),

3)$\int_c^d w(x)dx \neq 0$, per ogni $[c,d] \subseteq [a,b]$, con $c \neq d$.

Per la loro approssimazione si considera una **formula di quadratura**

$$I_n(f) := \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i),$$

dove $x_0$ , $x_1, ..., x_n$ sono $n+1$ punti distinti in $[a,b]$ detti i **nodi** della formula e $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_n$ sono detti i **pesi** della formula.

DEFINIZIONE. *Una formula di quadratura $I_n(f)$ si dice di **ordine polinomiale** (o grado di precisione) $m_n$ se essa è esatta per tutti i polinomi algebrici di grado $\leq m_n$, ma non per tutti i polinomi algebrici di grado $m_n + 1$. Cioè*

$$I(p) = I_n(p)$$

*per ogni $p \in \Pi_{m_n}$*, ma esiste $p \in \Pi_{m_n+1}$ tale che $I(p) \neq I_n(p)$.

Consideriamo il funzionale lineare $I$ che associa ad $f \in C^0([a,b])$ il valore $I(f)$ e valutiamone la norma

$$\|I\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |I(f)|.$$

Avremo

$$\|I\| \leq \left( \int_a^b w(x)dx \right) \|f\|_\infty \leq \int_a^b w(x)dx$$

ed inoltre per $f(x) := 1$ avremo $\|I\| \geq |I(f)| = (\int_a^b w(x)dx)$, per cui

$$\|I\| = \int_a^b w(x)dx.$$

Analogamente consideriamo il funzionale $I_n$ e valutiamo

$$\|I_n\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |I_n(f)|.$$

In questo caso

$$\|I_n\| \leq \sum_{i=0}^{n} |\omega_i| \,.$$

Inoltre considerata un funzione $f \in C^0([a,b])$ tale che $\|f\|_\infty = 1$ e $f(x_i) = sign(\omega_i)$, per ogni $i = 0, 1, ..., n$, si ha

$$\|I_n\| \geq |I_n(f)| = \sum_{i=0}^{n} |\omega_i| \,.$$

Quindi

$$\|I_n\| = \sum_{i=0}^{n} |\omega_i| \,.$$

OSSERVAZIONE.
Se $m_n \geq 0$ e se i pesi $\omega_i$ sono tutti positivi avremo

$$\|I_n\| = \sum_{i=0}^{n} \omega_i = \int_a^b w(x)dx = \|I\| \,.$$

## 1.1 FORMULE INTERPOLATORIE (lagrangiane)

Siano $x_0$ , $x_1, ..., x_n$, $n+1$ punti distinti in $[a,b]$ e consideriamo il corrispondente polinomio di interpolazione di $f$ nella forma di Lagrange

$$L_n(f,x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x),$$

dove

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \; i = 0, 1, ...., n.$$

Definiamo quindi, per una generica funzione peso $w(x)$,

$$I_n(f) := \int_a^b w(x) L_n(f,x) dx = \sum_{i=0}^{n} (\int_a^b w(x) l_i(x) dx) f(x_i).$$

Tale formula è detta **interpolatoria**. I pesi sono dunque

$$\omega_i = \int_a^b w(x) l_i(x) dx, \; i = 0, 1, ..., n.$$

TEOREMA. *Una formula di quadratura è interpolatoria se e solo se il suo ordine polinomiale è $\geq n$.*

*Dim.* Poichè per ogni polinomio $p_n$ di grado $\leq n$ si ha $L_n(p_n, x) = p_n(x)$, una formula interpolatoria ha ordine polinomiale almeno $n$.

Viceversa, consideriamo una formula di quadratura

$$I_n(f) := \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i),$$

e supponiamo che abbia ordine polinomiale $m_n \geq n$, vale a dire che per ogni polinomio $p_{m_n}$ di grado $\leq m_n$ avremo

$$I(p_{m_n}) = I_n(p_{m_n}) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i p_{m_n}(x_i).$$

In particolare, per ogni $j$, sarà

$$\int_a^b w(x) l_j(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i l_j(x_i) = w_j,$$

per cui la formula è interpolatoria.
□

## 1.2 FORMULE DI NEWTON- COTES

Consideriamo

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx.$$

Le formule di **Newton-Cotes** sono formule di quadratura interpolatorie su nodi equidistanti. Esse si dividono in due classi:
Formule **Aperte**: Gli estremi $a$ e $b$ non sono nodi. L'intervallo viene suddiviso in $n+2$ sottointervalli uguali ciascuno di ampiezza $h = \frac{b-a}{n+2}$ e i nodi sono

$$x_0 = a + h,\ x_1 = a + 2h, ....,\ x_n = a + (n+1)h = b - h$$

Formule **Chiuse**: $a$ e $b$ sono nodi. L'intervallo viene diviso in $n$ parti uguali di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$.
TEOREMA ($n$ **pari**). *Per una formula di Newton-Cotes, aperta o chiusa, con n pari, l'ordine polinomiale è $n+1$.*

*Inoltre se $f \in C^{n+2}([a,b])$ si ha*

$$I(f) - I_n(f) = K_n \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi),\ a < \xi < b,$$

*dove $K_n$ è una quantità dipendente da $n$ e dal tipo di formula.*
□
TEOREMA *($n$ **dispari**). Per una formula di Newton-Cotes, aperta o chiusa, con n dispari, l'ordine polinomiale è $n$.*

*Inoltre se $f \in C^{n+1}([a,b])$ si ha*

$$I(f) - I_n(f) = K_n \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),\ a < \xi < b,$$

*dove $K_n$ è una quantità dipendente da $n$ e dal tipo di formula.*
$\square$

I valori dei coefficienti $K_n$ sono dati dalle seguenti formule dove si è posto

$$r_n(x) = x(x-1)....(x-n) \quad \text{(polinomio fattoriale)}.$$

Per $n$ **pari**, formule **aperte**: $K_n = \int_{-1}^{n+1} x r_n(x) dx$.
Per $n$ **pari**, formule **chiuse**: $K_n = \int_0^n x r_n(x) dx$.
Per $n$ **dispari**, formule **aperte**: $K_n = \int_{-1}^{n+1} r_n(x) dx$.
Per $n$ **dispari**, formule **chiuse**: $K_n = \int_0^n r_n(x) dx$.
ESEMPI.

1) **Formula del punto medio**
$n = 0$, **aperta**, $x_0 = \frac{a+b}{2}, h = \frac{b-a}{2}$.
Dunque

$$I_0(f) = (b-a)f(x_0).$$

Ordine polinomiale 1. Errore per $f \in C^2([a,b])$:

$$I(f) - I_0(f) = \frac{h^3}{3} f''(\xi) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi), \ a < \xi < b.$$

2) **Formula del trapezio**
$n = 1$, **tipo chiuso**, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $h = b - a$.

$$I_1(f) = \frac{1}{2}(b-a)(f(x_0) + f(x_1)).$$

Ordine polinomiale 1. Errore per $f \in C^2([a,b])$:

$$I(f) - I_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \ a < \xi < b.$$

2) **Formula di Cavalieri-Simpson**
$n = 2$, **tipo chiuso**, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, $h = \frac{b-a}{2}$.

$$I_2(f) = \frac{1}{6}(b-a)(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)).$$

Ordine polinomiale 3. Errore per $f \in C^4([a,b])$:

$$I(f) - I_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \ a < \xi < b.$$

OSSERVAZIONE. Se $x_0 \neq \frac{a+b}{2}$ la formula del rettangolo $I_0(f) = (b-a)f(x_0)$ non è una formula di Newton-Cotes. Valutiamo l'errore nei casi $x_0 = a$ e $x_0 = b$. Per $x_0 = a$ avremo

$$I(f) - (b-a)f(a) = \int_a^b (f(x) - f(a))dx = \int_a^b (x-a)f'(\eta(x))dx, \ a < \eta(x) < b.$$

Dal teorema della media integrale, poichè $x-a \geq 0$, $x \in [a,b]$, otteniamo

$$I(f)-(b-a)f(a)=\frac{(b-a)^2}{2}f^{'}(\xi),\ a<\xi<b. \tag{1}$$

Procedendo analogamente per $x_0=b$ si ottiene

$$I(f)-(b-a)f(b)=-\frac{(b-a)^2}{2}f^{'}(\xi),\ a<\xi<b. \tag{2}$$

## 1.3 CONVERGENZA DELLE FORMULE DI QUADRATURA

Sia definita una matrice (infinita) di nodi in $[a,b]$ :

$x_0^{(0)}$,
$x_0^{(1)}, x_1^{(1)}$,
...............
$x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ..., x_n^{(n)}$,
...........................
ed una matrice di pesi ad essa associata
$\omega_0^{(0)}$,
$\omega_0^{(1)}, \omega_1^{(1)}$,
................
$\omega_0^{(n)}, \omega_1^{(n)}, ..., \omega_n^{(n)}$,

............................

Consideriamo quindi la successione di formule di quadratura corrispondenti

$$\{I_n\}, n=0,1,....$$

Indichiamo con $m_n$ l' ordine polinomiale di $I_n$. Ci chiediamo se

$$\lim_{n\to\infty}(I(f)-I_n(f))=0$$

per ogni $f \in C^0([a,b])$. Se ciò avviene diremo che le formule sono **convergenti**.

TEOREMA. *Se*

$$\lim_{n\to\infty} m_n = +\infty$$

*e se esiste una costante* $M>0$ *tale che*

$$\|I_n\| = \sum_{i=0}^{n}\left|\omega_i^{(n)}\right| \leq M,\ \text{per ogni } n,$$

*allora*

$$\lim_{n\to\infty}(I(f)-I_n(f))=0$$

*per ogni* $f \in C^0([a,b])$.

*Dim*: Sia $f \in C^0([a,b])$. Per ogni $n$ indichiamo con $p^*_{m_n}$ il polinomio di grado $\leq m_n$ di minimo scarto da $f$, ossia tale che

$$E_{m_n}(f) = \left\| f - p^*_{m_n} \right\|_\infty \leq \| f - p \|_\infty \,, \text{ per ogni } p \in \Pi_{m_n}.$$

Ricordiamo che per la nostra ipotesi $E_{m_n}(f) \to 0$ quando $n \to \infty$.
Poichè $I(p^*_{m_n}) = I_n(p^*_{m_n})$, avremo

$$I(f) - I_n(f) = I(f) - I(p^*_{m_n}) + I_n(p^*_{m_n}) - I_n(f).$$

Per una generica funzione peso $w(x)$ si ha che

$$\begin{aligned}
\left| I(f) - I(p^*_{m_n}) \right| &= \left| \int_a^b w(x)(f(x) - p^*_{m_n}(x))dx \right| \\
&\leq \left( \int_a^b w(x)dx \right) E_{m_n}(f) = \| I \| \, E_{m_n}(f)
\end{aligned}$$

ed inoltre per ipotesi

$$\left| I_n(p^*_{m_n}) - I_n(f) \right| = \left| \sum_{i=0}^n \omega_i^{(n)} (f(x_i) - p^*_{m_n}(x_i)) \right| \leq E_{m_n}(f) \sum_{i=0}^n \left| \omega_i^{(n)} \right| \leq E_{m_n}(f) M.$$

Poiché $E_{m_n}(f) \to 0$ segue la tesi.
OSSERVAZIONE. Formule interpolatorie con pesi tutti positivi, per ogni $n$, sono convergenti. Infatti come si è visto in tal caso $\| I_n \| = \| I \|$.
□
Per le formule di Newton-Cotes vale il seguente
TEOREMA (Kusmin). *Per qualunque successione di formule di Newton-Cotes si ha*

$$\lim_{n \to \infty} \| I_n \| = +\infty.$$

*e non è garantita la convergenza per ogni $f \in C^0([a,b])$.*
□

## 1.4 FORMULE COMPOSITE

Per ottenere approssimazioni dell'integrale che siano convergenti, si possono considerare le **formule composite**. Una formula di quadratura composita si costruisce suddividendo l'intervallo di integrazione in un certo numero di sottointervalli ed applicando su ciascuno di essi una formula di quadratura elementare (con pochi nodi). La convergenza si otterrà diminuendo l' ampiezza di tali sottointervalli (aumentandone quindi il numero).

Suddividiamo quindi $[a,b]$ in $m$ sottointervalli ciascuno di ampiezza $H = \frac{b-a}{m}$, ed indichiamo gli estremi di questi con

$$t_0(= a) < t_1 < ... < t_j < t_{j+1}, < ... < t_m(= b),$$

cioè

$$t_j = a + jH, \ per \ j = 0, 1, ...m.$$

Con riferimento all' integrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, avremo dunque

$$I(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)dx.$$

Applichiamo quindi una formula di quadratura al calcolo di ciascun addendo

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)dx$$

e sommiamo i contributi per ottenere la formula composita che costitusce l'approssimazione di $I(f)$.

ESEMPIO 1. **Formula dei Trapezi composita**

Definiamo $H = \frac{b-a}{m}$, e poniamo $h = H$.

Applicando la formula del trapezio per il calcolo di $\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)dx$ su ciascun sottointervallo $[t_j, t_{j+1}]$, per $j = 0, ...., m-1$, si ottiene la formula composita dei trapezi:

$$I_{1,m}(f) = \frac{1}{2}h \left( f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(a + jh) \right).$$

In altri termini questa formula corrisponde ad approssimare l'integrale di $f$ con quello del suo polinomio interpolante lineare a tratti. Pertanto

$$\lim_{h \to 0} (I(f) - I_{1,m}(f)) = 0,$$

per $f \in C^0([a, b])$.

Se $f \in C^2([a, b])$, nel sottointervallo $j$-esimo di ampiezza $h$ l'errore è $-\frac{h^3}{12} f''(\xi_j)$, con $\xi_j$ appartenente a tale sottointervallo. Quindi l'errore complessivo è

$$I(f) - I_{1,m}(f) = \sum_{j=0}^{m-1} -\frac{h^3}{12} f''(\xi_j).$$

Poiché, essendo $f \in C^2([a, b])$, esiste $a < \xi < b$ tale che

$$\sum_{j=0}^{m-1} f''(\xi_j) = mf''(\xi),$$

si ottiene

$$I(f) - I_{1,m}(f) = -\frac{h^2(b-a)}{12} f"(\xi).$$

ESEMPIO 2. **Formula composita di Cavalieri-Simpson**

Definiamo $H = \frac{b-a}{m}, h = \frac{H}{2}$.

Applicando la formula di Cavalieri-Simpson su ciascun sottointervallo $[t_j, t_{j+1}]$, per $j = 0, ...., m-1$, si ottiene la formula composita:

$$I_{2,m}(f) = \frac{1}{3} h \left( f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(a + 2jh) + 4 \sum_{j=1}^{m} f(a + (2j-1)h) \right).$$

Per quanto riguarda la convergenza si ha

$$\lim_{H \to 0} (I(f) - I_{2,m}(f)) = 0,$$

per ogni $f \in C^0([a, b])$.

Se $f \in C^4([a, b])$, in ogni sottointervallo $j$-esimo di ampiezza $H = 2h$ l' errore è $-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_j)$ con $\xi_j$ appartenente a tale sottointervallo. Quindi l'errore complessivo è

$$I(f) - I_{2,m}(f) = -\frac{h^5}{90} \sum_{j=0}^{m-1} f^{(4)}(\xi_j) = -\frac{h^5}{90} m f^{(4)}(\xi) = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi), \; a < \xi < b.$$

# 2 FORMULE GAUSSIANE

Data una funzione peso $w(x)$, sia $\{\Phi_i\}_w$, $i = 0, 1, 2, ...$, con $\Phi_i \in \Pi_i$, un **sistema di polinomi** (algebrici) **ortogonali** rispetto al prodotto scalare

$$< f, g >_w = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx, \tag{3}$$

ossia tali che

$$< \Phi_i, \Phi_j >_w = \int_a^b w(x) \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx = 0, \text{ se } i \neq j.$$

Ogni polinomio del sistema $\{\Phi_i\}_w$ è definito a meno di una costante moltiplicativa non nulla. Indicati dunque $a_i^{(j)}$,$i = 0, 1, ..., j$, i suoi coefficienti, il generico polinomio $\Phi_j$ ha la forma

$$\Phi_j(x) = a_j^{(j)} x^j + ... + a_1^{(j)} x + a_0^{(j)}, \; a_j^{(j)} \neq 0.$$

Un sistema di polinomi ortogonali è caratterizzato dalla seguente proprietà.

**Caratterizzazione dei sistemi di polinomi ortogonali.**

*Un sistema di polinomi algebrici* $\{\Phi_i\}_w$, *con* $\Phi_i \in \Pi_i$ , *è un sistema ortogonale se e solo se, per ogni* $n$, *il polinomio* $\Phi_n$ *è ortogonale a tutti i polinomi algebrici di grado inferiore.*

PROPRIETA'. *Per ogni* $n$, *il polinomio* $\Phi_n$ *possiede* $n$ *radici reali, distinte ed interne all'intervallo* $[a,b]$.

Consideriamo ora il calcolo di

$$I(f) := \int_a^b w(x)f(x)dx$$

e una formula di quadratura interpolatoria

$$I_n(f) := \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i), \tag{4}$$

$$\omega_i = \int_a^b w(x)l_i(x)dx, \text{ per } i = 0, 2, ..., n.$$

Come abbiamo osservato in precedenza, le formule interpolatorie su $n+1$ nodi hanno ordine polinomiale almeno $n$ per ogni scelta dei nodi. Ci chiediamo quale sia il massimo ordine polinomiale raggiungibile.

A questo proposito vale il seguente teorema.

TEOREMA. *Data una funzione peso* $w(x)$, *sia* $m > n$ e s*upponiamo che il polnomio* $(x-x_0)....(x-x_n)$ sia ortogonale allo spazio $\Pi_{m-n-1}$, ossia che

$$\int_a^b w(x)\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)p_{m-n-1}(x) = 0, \text{ per ogni } p_{m-n-1} \in \Pi_{m-n-1}. \tag{5}$$

*Allora la formula di quadratura interpolatoria* (4) *ha ordine polinomiale* $m_n \geq m > n$. *Viceversa, se la formula* (4) *ha ordine polinomiale* $m_n = m > n$ *allora la* (5) *è necessariamente verificata.*

*Dim.* Supponiamo valga la (5).Dato $p_m \in \Pi_m$ consideriamo il suo interpolante $L_n(p_m,x)$. Avremo (forma di Newton)

$$p_m(x) = L_n(p_m,x) + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)p_m[x_0,x_1,..,x_n,x].$$

Chiaramente $p_m[x_0,x_1,..,x_n,x] \in \Pi_{m-n-1}$ e pertanto

$$\begin{aligned} I(p_m) - I_n(p_m) &= \int_a^b w(x)(p_m(x) - L_n(p_m,x))dx \\ &= \int_a^b w(x)\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)p_m[x_0,x_1,..,x_n,x]dx = 0. \end{aligned}$$

Per provare il viceversa notiamo che per ogni $p_{m-n-1} \in \Pi_{m-n-1}$ esiste $p_m \in \Pi_m$ tale che $p_{m-n-1} = p_m[x_0,x_1,..,x_n,x]$. Dunque se $m_n = m > n$ necessariamente $\int_a^b w(x)\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)p_{m-n-1}(x)dx = I(p_m) - I_n(p_m) = 0$.

COROLLARIO. *Il massimo ordine polinomiale possibile di una formula di quadratura interpolatoria è* $2n+1$.*Tale ordine si ottiene se e solo se i nodi sono* *gli zeri del polinomio $\Phi_{n+1}$ appartenente al sistema $\{\Phi_i\}_w$ di polinomi ortogonali rispetto al prodotto scalare* (3).

*Dim.* Poichè $\int_a^b w(x)(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i))^2 dx > 0$, la relazione (5) può essere verificata al più quando $m-n-1=n$ *ossia per* $m=2n+1$. Per la caratterizzazione dei sistemi di polinomi ortogonali, ciò accade se e solo se

$$\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = \Phi_{n+1}/a_{n+1}^{(n+1)}.$$

□

DEFINIZIONE. *Le formule di quadratura interpolatorie su $n+1$ nodi che raggiungono l' ordine polinomiale $2n+1$ sono dette* **formule di quadratura gaussiane**.
□

PROPOSIZIONE *Tutti i pesi delle formule gaussiane sono positivi.*
*Dim.* Dobbiamo dimostrare che per ogni $n$ e per ogni $i=0,1,...,n$, si ha $\omega_i > 0$. Per ogni $i=0,...,n$, applichiamo la formula di quadratura a $\int_a^b w(x)l_i^2(x)dx$. Poichè $l_i^2(x)$ è un polinomio di grado $2n$ e la formula ha ordine polinomiale $2n+1$, si ha:

$$0 < \int_a^b w(x)l_i^2(x)dx = \sum_{j=0}^{n}\omega_j l_i^2(x_j) = \omega_i.$$

□

COROLLARIO *Le formule di quadratura gaussiane sono convergenti.*
□

ESEMPI.
1. Nel caso $w(x)=1$ e$[a,b]=[-1,1]$ i polinomi ortogonali sono noti come Polinomi di Legendre, sono indicati con $P_n(x)$ e sono calcolabili attraverso la relazione ricorsiva

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x),\ n=1,2,...$$

con $P_0(x)$ $(x)=1$, $P_1(x)=x$.

Le corrispondenti formule di quadratura gaussiane per il calcolo di $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, sono dette **formule di Gauss-Legendre**.

Per i primi valori di $n$, gli $n+1$ nodi e pesi sono :
n=0: $x_0=0, \omega_0=2$;
n=1: $x_0=-0.577350, x_1=+0.577350$; $\omega_0=1, \omega_1=1$;
n=2:$x_0=-0.774597, x_1=0, x_2=+0.774597$; $\omega_0=5/9, \omega_1=8/9, \omega_2=5/9$;

n=3: $x_0 = -0.861136, x_1 = -0.339981, x_2 = 0.339981, x_3 = +0.861136$; $\omega_0 = 0.347855; \omega_1 = 0.652145, \omega_2 = 0.652145, \omega_3 = 0.347855$;

n=4: $x_0 = -0.906180, x_1 = -0.538469, x_2 = 0, x_3 = +0.538469, x_4 = +0.906180$; $\omega_0 = 0.236927, \omega_1 = 0.478929, \omega_2 = 0.568889, \omega_3 = 0.478929, \omega_4 = 0.236927$;

Con riferimento ad un generico intervallo, ogni integrale può essere approssimato con le formule di Gauss-Legendre attraverso il cambio di variabile:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b+t(b-a)}{2})dt.$$

2. Nel caso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $[a,b] = [-1,1]$ si ottengono i Polinomi di Chebyshev di prima specie definiti da

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Per questi vale la formula ricorsiva

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

con $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

Le corrispondenti formule per il calcolo di $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx$ sono dette **formule di Gauss-Chebyshev**. Per ogni $n$ gli $n+1$ nodi sono dati dalla formula

$$x_i = \cos(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi), \text{ per } i = 0, 1, ..., n,$$

mentre i pesi sono

$$\omega_i = \frac{\pi}{n+1}, \text{ per } i = 0, 1, ..., n.$$

Nel caso $w(x) = e^{-x}$ e $[a,b] = [0, +\infty)$, il prodotto scalare (3) è ben definito per ogni coppia di polinomi algebrici, ed i polinomi ortogonali sono noti come Polinomi di Laguerre (Edmond Nicolas 1834-1886, Fra.). Essi sono indicati con $L_n(x)$ e sono esprimibili attraverso la relazione ricorsiva:

$$L_{n+1}(x) = \frac{(2n+1-x)}{n+1}L_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x),$$

con $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$.

Le corrispondenti formule per il calcolo di $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)dx$ sono dette **formule di Gauss-Laguerre**.

## 2.1 Estrapolazione di Richardson

Sia $I(f)$ un funzionale lineare, cioè un operatore lineare che associa ad una funzione $f$ un numero reale.

Supponiamo che $I(f)$ sia approssimato da $I_h(f)$, dipendente da un parametro $h$. Supponiamo inoltre che

$$I(f) - I_h(f) = ch^p + 0(h^s) \text{ con } s > p,$$

dove $c$ è indipendente da $h$. Ci interessa valutare il termine principale dell'errore, cioè $ch^p$, a meno di infinitesimi di ordine $s$. Per far ciò riapplichiamo la formula con un diverso valore del parametro, diciamo $\frac{h}{2}$. Si ottiene una nuova approssimazione $I_{h/2}(f)$ che soddisfa la relazione

$$I(f) - I_{h/2}(f) = c(\frac{h}{2})^p + 0^{'}(h^s)$$

dove $0^{'}(h^s)$ indica ancora un infinitesimo di ordine $s$.

Sottraendo le due espressioni si ottiene la seguente stima :

$$c(\frac{h}{2})^p = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1} + 0"(h^s),$$

che da luogo alla relazione:

$$I(f) = I_{h/2} + \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1} + 0^{'''}(h^s)$$

.dove $0"(h^s)$ e $0^{'''}(h^s)$ indicano ancora infinitesimi di ordine $s$. La nuova formula così ottenuta:

$$I_h^{(1)} := I_{h/2} + \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1}$$

approssima il funzionale $I(f)$ con ordine $s$. Si noti che $I_h^{(1)}$ è ottenuta da $I_h$ ed $I_{h/2}$ senza ulteriori valutazioni della funzione $f$.

Il procedimento appena descritto prende il nome di **estrapolazione di Richardson**.

E' facile vedere che se l'errore ammette uno sviluppo in serie del tipo

$$I(f) - I_h = c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1} + ... + c_k h^{p_k} + ...$$

.con $c_k$ indipendenti da $h$ e $p_0 < p_1 < ... < p_k < ...$, allora l'approssimazione estrapolata $I_h^{(1)}$ soddisfa

$$I(f) - I_h^{(1)} = d_1 h^{p_1} + d_2 h^{p_2} + ... + d_k h^{p_k} + ...$$

con $d_k$ indipendente da $h$ per ogni $k$. In base a ciò il processo di estrapolazione può essere riapplicato ottenendo una nuova approssimazione $I_h^{(2)}$ con un errore di ordine $p_2$, e così via.

Ad esempio per la formula dei trapezi

$$I_{1,m}(f) = \frac{1}{2}h\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(a + jh)\right), \ h = \frac{b-a}{m},$$

se $f$ è sufficientemente regolare, ci si può basare sulla formula di **Eulero e Mac Laurin**

$$\int_a^b f(x)dx - I_{1,m}(f) = c_2h^2 + c_4h^4 + ... + c_{2r}h^{2r} + .....$$

dove le costanti $c_i$ non dipendono da $h$. Più precisamente, se $f \in C^{2k+2}([a,b])$ si ha

$$\int_a^b f(x)dx - I_{1,m}(f) = c_2h^2 + c_4h^4 + ... + c_{2k}h^{2k} + O(h^{2k+2}).$$

Il procedimento di successive estrapolazioni di Richardson applicate alla formula dei trapezi prende il nome di **quadratura di Romberg**.