1 APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE DI FUNZIONI

Consideriamo le seguenti tipologie di funzioni
1) **Polinomi algebrici**.

Indichiamo con Π_n lo spazio vettoriale dei polinomi algebrici a coefficienti reali di grado $\leq n$. La dimensione di Π_n è $n+1$. Una sua base è data da $1, x, x^2, ..., x^n$. Se un polinomio è espresso in tale base, cioè

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

il metodo più efficiente per il calcolo del suo valore in un punto z è il seguente:
Algoritmo di Ruffini-Horner.

$p_0 = a_{n,}$
$p_i = p_{i-1}z + a_{n-i,}$ *per* $i = 1, 2....., n,$
$p(z) = p_n.$

□

Vengono eseguite n moltiplicazioni ed n somme.

Consideriamo inoltre il polinomio $q(x)$ di grado $n-1$ definito da

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{n-i} x^{i-1}.$$

Avremo allora che, per ogni x,

$$p(x) = p(z) + (x - z)q(x).$$

Dunque viene realizzata la divisione di $p(x)$ per $(x-z)$, dove $q(x)$ è il polinomio quoziente e il valore di $p(z)$ il resto. Inoltre derivando si ottiene

$$p'(x) = q(x) + (x - z)q'(x)$$

e pertanto otteniamo il valore della derivata in z:

$$p'(z) = q(z).$$

Dati $n+1$ punti distinti $x_0, x_1, ..., x_n$ si definiscono i polinomi di base o coefficienti di **Lagrange** :

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \text{ per } i = 0, ..., n.$$

Si osservi che

$$l_i(x_j) = 1 \text{ } se \text{ } i = j,$$
$$l_i(x_j) = 0 \text{ } se \text{ } i \neq j.$$

Ogni elemento di Π_n si può esprimere in modo univoco come loro combinazione lineare cioè

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x).$$

Ovviamente, $p(x_i) = y_i$.

2) **Funzioni polinomiali a tratti.**

Dati $m+1$ punti distinti $x_0 = a < x_1 < ... < x_m = b$ questi definiscono una partizione di $[a,b]$ che indichiamo con

$$\Delta_m = \{x_0, x_1, ..., x_m\}.$$

L' intervallo $[a,b]$ resta così suddiviso in m sottointervalli $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, per $i = 1, ..., m$. La quantità

$$h = h_m = max_{1 \leq i \leq m} |x_i - x_{i-1}|,$$

viene detta **ampiezza** della partizione.

Le funzioni polinomiali a tratti sono rappresentate da un polinomio su ciascun sottointervallo e godono su $[a,b]$ di una certa regolarità.

Più precisamente, dati n e k interi non negativi, si definisce lo spazio

$$S_{\Delta_m}^{n,k} := \left\{ s : [a,b] \to R : s|_{I_i} \in \Pi_n, \text{ per ogni } i = 1, ..., m \ , \ s \in C^k([a,b]) \right\}.$$

.

Avremo

$$\dim(S_{\Delta_m}^{n,k}) = m(n+1) - (k+1)(m-1).$$

OSSERVAZIONE. $S_{\Delta_m}^{n,n} = \Pi_n$.

1.1 TEOREMI DI APPROSSIMAZIONE

In $C^0([a,b])$ consideriamo la topologia definita dalla norma uniforme

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Consideriamo lo spazio

$$\Pi = \cup_{n=0}^{\infty} \Pi_n.$$

TEOREMA (**Weierstrass**).

Lo spazio Π *è denso in* $C^0([a,b])$.

□

Fissati n e k, consideriamo una successione di partizioni $\Delta_{m_1} \subset \Delta_{m_2} \subset .... \subset \Delta_{m_r}$ ...,... le cui rispettive ampiezze indichiamo qui con $h_1, h_2, ..., h_r$..... Consideriamo gli spazi di polinomi a tratti $S_{\Delta_{m_r}}^{n,k}$ e lo spazio

$$S^{n,k} = \cup_{r=1}^{\infty} S_{\Delta_{m_r}}^{n,k}.$$

TEOREMA. *Supponiamo che*

$$lim_{r \to \infty} h_r = 0.$$

Allora lo spazio $S^{n,k}$ *è denso in* $C^0([a,b])$.
□

1.2 INTERPOLAZIONE POLINOMIALE (DI LAGRANGE)

TEOREMA. *Siano* $x_0, x_1, ..., x_n,$ $n+1$ *punti distinti sulla retta reale e siano dati* $y_0, y_1, ..., y_n,$ *valori reali. Esiste ed è unico il polinomio* $p_n \in \Pi_n$ *tale che*

$$p_n(x_i) = y_i,$$

per ogni $i = 0, 1, ..., n$.
Tale polinomio è detto **polinomio di interpolazione** *dei valori* $y_0, y_1, ..., y_n,$ *nei punti* $x_0, x_1, ..., x_n$.

Dim: Consideriamo il polinomio

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x), \tag{1}$$

dove $l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, per $i = 0, ..., n$, sono i coefficienti di Lagrange relativi ai punti $x_0, x_1, ..., x_n$. Poichè $l_j(x_i) = 1$ se $i = j$ e $l_j(x_i) = 0$ se $i \neq j$, $p_n(x)$ soddisfa le condizioni di interpolazione. Ciò prova l' esistenza.

Per provare l' unicità, supponiamo che $q_n \in \Pi_n$ sia tale che $q_n(x_i) = y_i$, per ogni $i = 0, 1, ..., n$. Allora il polinomio, di grado n, $p_n - q_n$ vale zero negli $n+1$ punti $x_0, x_1, ..., x_n$. Ciò implica che esso è necessariamente il polinomio nullo.
□

Il polinomio (1) è detto **polinomio di interpolazione nella forma di Lagrange**.

1.3 ERRORE DELL' INTERPOLAZIONE

Ci riferiremo ora ad una funzione f che assume i valori $y_i = f(x_i)$, per $i = 0, 1, ..., n$, nei punti (nodi) di interpolazione.

Quindi consideriamo il corrispondente polinomio di interpolazione che indichiamo con $L_n(f, x)$ cioè

$$L_n(f, x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x).$$

Consideriamo la funzione errore

$$r(x) = f(x) - L_n(f, x).$$

TEOREMA. *Se* $f \in C^{n+1}([a,b])$, *con* $a \le \min_{0\le i\le n} x_i$ *e* $b \ge \max_{0\le i\le n} x_i$, *allora, per ogni* $x \in [a,b]$,

$$r(x) = \pi(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

dove

$$\pi(x) = (x-x_0)....(x-x_i)....(x-x_n) \in \Pi_{n+1}$$

e $\xi = \xi(x) \in (a,b)$.

Dim: Se $x = x_i$ allora la tesi vale. Consideriamo allora un punto $\overline{x} \ne x_i$ per ogni i, con $\overline{x} \in [a,b]$, e definiamo la funzione

$$\Phi(x) = r(x) - (\frac{r(\overline{x})}{\pi(\overline{x})})\pi(x).$$

Tale funzione è derivabile almeno $n+1$ volte (in quanto lo è la f) e si annulla in $n+2$ punti, cioè in $\overline{x}$ e nei punti di interpolazione.

Pertanto, per il teorema di Rolle, la derivata Φ' si annulla in almeno $n+1$ punti distinti contenuti in (a,b), la Φ" in almeno n e così via ed infine la $\Phi^{(n+1)}$ si annulla in un punto $\xi \in (a,b)$ (che dipende da $\overline{x}$). Pertanto, derivando avremo,

$$0 = \Phi^{(n+1)}(\xi) = r^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!(\frac{r(\overline{x})}{\pi(\overline{x})}) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!(\frac{r(\overline{x})}{\pi(\overline{x})}).$$

Dalla quale otteniamo immediatamente la tesi.

□

Si osservi che, in base alla dimostrazione, il punto $\xi = \xi(x)$ appartiene al più piccolo intervallo contenente i punti $x, x_0, x_1, ..., x_n$.

OSSERVAZIONE. Sotto le ipotesi del teorema, poichè

$$|(x-x_0)....(x-x_i)....(x-x_n)| \le (b-a)^{n+1},$$

otteniamo la maggiorazione

$$\max_{x\in[a.b]} |r(x)| \le (b-a)^{n+1}\frac{\max_{x\in[a.b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}. \quad (2)$$

□

OSSERVAZIONE. Consideriamo il caso $n = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$. E' facile verificare che, se $x \in [a,b]$,

$$|(x-a)(x-b)| \le \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Consideriamo il polinomio di grado 1 interpolante la f in a e in b, cioè

$$L_1(f,x) = f(a)\frac{(x-b)}{a-b} + f(b)\frac{(x-a)}{b-a}.$$

Se $f \in C^2([a,b])$, allora dal teorema segue la maggiorazione

$$\max_{x\in[a.b]} |f(x) - L_1(f,x)| \leq (b-a)^2 \frac{\max_{x\in[a.b]} \left|f"(x)\right|}{8}. \qquad (3)$$

Si può vedere che in generale, se $x_0 < x_1 < ...x_i < .... < x_n$, posto $h = \max_{0\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}|$, si ottiene

$$\max_{x\in[a.b]} |(x-x_0)....(x-x_i)....(x-x_n)| \leq n!h^{n+1}/4.$$

□

1.4 POLINOMIO DI NEWTON

Consideriamo i punti distinti $x_0, x_1, ..., x_n$.

DEFINIZIONE *Si dice **differenza divisa** di ordine k di f la funzione definita nel modo seguente:*

se $k = 0$:

$$f[x] = f(x);$$

se $k = 1$, per $x \neq x_0$:

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0};$$

se $k = 2, 3, ..., n+1$, per $x \neq x_i$, con $i = 0, 1, ..., k-1$:

$$f[x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x] = \frac{f[x_0, x_1, ..., x_{k-2}, x] - f[x_0, x_1, ..., x_{k-1}]}{x - x_{k-1}}.$$

□

Si può osservare che il valore assunto dalla differenza divisa di ordine k è invariante rispetto ad una permutazione degli indici dei punt $x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x$. Quindi, per $k \geq 2$, vale anche la formula

$$f[x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x] = f[x_1, ..., x_{k-1}, x_0, , x] = \frac{f[x_1, ..., x_{k-2}, x_{k-1}, x] - f[x_0, x_1, ..., x_{k-1}]}{x - x_0},$$

vale a dire

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f[x_1, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_0},$$

$$f[x_0, x_1, x_2, , x] = \frac{f[x_1, x_2, , x] - f[x_0, x_1, , x_2]}{x - x_0}$$

e così via.

TEOREMA. *Dati $x_0, x_1, ..., x_n$, si ha*

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \\ & + ... + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, ..., x_n] + \\ & + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})(x-x_n)f[x_0, x_1, .., x_n, x]. \end{aligned}$$

□

Dim. Si procede per induzione su n. La formula evidentemete è vera per $n = 1$. Supponiamola vera per $n-1$. Allora tramite la formula

$$f[x_0,x_1,..,x_n,x] = \frac{f[x_0,x_1,...,x_{n-1},x] - f[x_0,x_1,...,x_{n-1},x_{n,}]}{x - x_n},$$

si prova che è vera per n.

TEOREMA. *Il polinomio di grado n, detto* **polinomio di Newton**,

$$\begin{aligned} p_n(x) = f(x_0) &+ (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \\ &+ ... + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-2})f[x_0,x_1,...,x_{n-1}] + \\ &+ (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,...,x_n], \end{aligned}$$

è tale che

$$p_n(x_i) = f(x_i), per\ i = 1,2,...,n,$$

e quindi è il polinomio di interpolazione (*nella forma di* Newton).

□

Per quanto riguarda il costo computazionale per il calcolo del polinomio di interpolazione nelle due forme di Lagrange e di Newton si ha:
il calcolo nella forma di Lagrange richiede circa $\frac{n^2}{2}$ somme + n^2 molt.
il calcolo nella forma di Newton richiede circa $\frac{n^2}{2}$ molt. + n^2 somme.

Si osservi che calcolo nella forma di Newton è comodo qualora si vogliano aggiungere dei nodi di interpolazione.

Per il calcolo delle differenze divise in $p_n(x)$ si può utilizzare lo schema seguente:

$$\begin{array}{cccccc}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0,x_1] & & & \\
\cdot & \cdot & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
\cdot & \cdot & f[x_2,x_3]. & f[x_1,x_2,x_3] & \cdot & \\
x_j & f[x_j] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & f[x_{n-2},x_{n-1}] & \cdot & \cdot & \cdot \\
x_n. & f[x_n] & f[x_{n-1},x_n] & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & \cdot & f[x_0,x_1,...,x_n]
\end{array}$$

Le differenze divise che intervengono nella formula di $p_n(x)$ compaiono sulla diagonale.

1.5 CONVERGENZA

Sia definita una matrice (infinita) di punti di interpolazione in $[a,b]$:

$x_0^{(0)}$,
$x_0^{(1)}, x_1^{(1)}$,
....
$x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ..., x_n^{(n)}$,
....

Data una funzione f continua in $[a, b]$, consideriamo la successione dei polinomi,

$$L_0(f, x), L_1(f, x), ..., L_n(f, x), ..., ...$$

di grado $0, 1, ..., n$,... interpolanti la f rispettivamente nelle sequenze di nodi di cui sopra.

Diremo lo schema interpolatorio associato alla matrice di nodi considerata è **convergente** se

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - L_n(f, x)| = 0.$$

Utilizzando la fomula (2), se $f \in C^\infty([a, b])$ e le derivate sono uniformemente limitate, cioè esiste una costante $M > 0$ tale che

$$\left\| f^{(n)} \right\|_\infty \le M, \text{ per ogni } n, \tag{4}$$

allora, per ogni n avremo

$$\max_{x\in[a.b]} |r(x)| \le (b - a)^{n+1} \frac{M}{(n + 1)!}.$$

Pochè, per ogni $C > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{C^n}{n!} = 0$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} (b - a)^{n+1} \frac{M}{(n + 1)!} = 0,$$

e si ottiene la convergenza. Per $f \in C^\infty([a, b])$ si può avere la convergenza anche se non vale la (4), ossia anche se $\lim_{n\to\infty} \left\| f^{(n)} \right\|_\infty = \infty$. Ad esempio basterà che esista $\beta > 0$ tale che per ogni n:

$$\left\| f^{(n)} \right\|_\infty \le \beta^n.$$

Infatti, in questo caso

$$\max_{x\in[a.b]} |r(x)| \le \frac{(\beta(b - a))^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

In generale però, anche se $f \in C^\infty([a, b])$, la convergenza non è assicurata per ogni matrice di nodi, come dimostra il classico esempio (fenomeno di Runge) dovuto a **Runge,** relativo alla funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2},$$

nell'intervallo $[a, b] = [-1, 1]$. Si può verificare che considerando una matrice di nodi equidistanti, cioè

$$x_j^{(n)} = a + j\frac{(b - a)}{n}, \text{ per } j = 0, 1, ..., n, \text{ per } n = 0, 1, ...,$$

la successione di polinomi di interpolazione di Lagrange non converge ad f.

In generale, per le funzioni continue, vale il seguente risultato.

TEOREMA (**Faber**). *Qualunque sia la matrice dei nodi in $[a, b]$ esiste $f \in C^0([a, b])$ per la quale lo schema di interpolazione non è convergente.*

□

1.6 POLINOMI DI CHEBYSHEV

Per ogni numero naturale n si definisce polinomio di **Chebyshev** (di prima specie) di grado n la seguente funzione definita in $[-1, 1]$.

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

Valgono le seguenti proprietà:

1) La famiglia di polinomi $\{T_n\}, n = 0, 1, ...,$ costituisce un sistema di polinomi ortogonali rispetto al prodotto scalare

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} f(x)g(x)dx.$$

Infatti si ha

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(x)T_m(x)dx = 0, \text{ se } n \neq m.$$

Si ha inoltre

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} T_0(x)T_0(x)dx = \pi$$

e

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(x)T_n(x)dx = \frac{\pi}{2}, \text{ per } n > 0.$$

2) Usando la formula $cos(\alpha) + cos(\beta) = 2cos(\frac{\alpha+\beta}{2})cos(\frac{\alpha-\beta}{2}\varphi)$, si ottiene la seguente relazione ricorsiva a tre termini

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \text{per } x \in [-1, 1],$$

con $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.

Per $n \geq 1$, il coefficente di grado massimo di $T_n(x)$ è dunque 2^{n-1}.

3) Per ogni n, $T_n(x)$ possiede n radici reali, distinte ed interne a $[-1, 1]$ (ossia in (-1.1)). Precisamente, gli zeri di $T_n(x)$ sono

$$x_{n,i} = \cos(\frac{(2i - 1)\pi}{2n}), \text{ per } i = 1, 2, .., n. \tag{5}$$

4) Poichè, per $k = 0, 1, ..., n$, $T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) = (-1)^k$, si ha $max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$. Dunque, considerato il polinomio monico

$$\widetilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}.$$

avremo $\left\|\widetilde{T}_n(x)\right\|_\infty = \frac{max_{x\in[-1,1]}|T_n(x)|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Vale la seguente proprietà:

tra tutti i polinomi monici di grado n su $[-1, 1]$, il polinomio $\widetilde{T}_n(x)$ è quello di minima norma uniforme, vale a dire

$$\left\|\widetilde{T}_n\right\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}} \leq max_{x\in[-1,1]} |p_n(x)|$$

per ogni polinomio monico $p_n \in \Pi_n$.

Con riferimento ad un generico intervallo $[a, b]$, possiamo utilizzare il cambio di variabile

$$x = \frac{(b+a)}{2} + t\frac{(b-a)}{2}, x \in [a, b], t \in [-1, 1].$$

Considerati $n + 1$ generici punti distinti in $[a, b]$, $x_0, x_1, ..., x_n$, possiamo rappresentare tali punti nella forma

$$x_i = \frac{(b+a)}{2} + t_i\frac{(b-a)}{2}, \text{ con } t_i \in [-1, 1]$$

ed avremo per $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \pi(x) &= (x - x_0)....(x - x_i)....(x - x_n) \qquad (6) \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}(t - t_0)....(t - t_i)....(t - t_n), \ t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Poichè, come si è detto, il termine $\max_{t\in[-1,1]} |(t - t_0)....(t - t_i)....(t - t_n)|$ risulta minimo quando i t_i sono gli zeri di T_{n+1} (vedi formula (5)), avremo che $\max_{x\in[a,b]} |\pi(x)|$ sarà minimo quando, per $i = 0, 1, 2, .., n$,

$$x_i = \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\cos(\frac{(2(i+1)-1)\pi}{2(n+1)}). \qquad (7)$$

Questi punti sono gli zeri di T_{n+1} traslati in $[a.b]$, detti anche nodi di Chebyshev in $[a.b]$.

1.7 TEORIA GENERALE DI CONVERGENZA

Analizzeremo qui la convergenza degli schemi di interpolazione nel caso generale.

A tale scopo introduciamo il polinomio di migliore approssimazione uniforme ossia nella norma $\|\cdot\|_\infty$.

DEFINIZIONE . *Per ogni funzione $f \in C^0([a, b])$ e per ogni numero naturale n esiste ed è unico il polinomio $p_n^* \in \Pi_n$ tale che*

$$E_n(f) = \|f - p_n^*\|_\infty \leq \|f - p_n\|_\infty \text{ per ogni } p_n \in \Pi_n.$$

Tale polinomio p_n^* è detto il **polinomio di migliore approssimazione** (o di minimo scarto) **uniforme** *di grado n della funzione f.*

□

Ovviamente per Weierstrass avremo

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0.$$

ESEMPIO. Poichè il polinomio monico $\widetilde{T}_{n+1}(x)$ è quello di norma (uniforme) minima in $[-1, 1]$ tra tutti i polinomi monici di grado $n + 1$, allora il polinomio $p_n^*(x) = x^{n+1} - \widetilde{T}_{n+1}(x)$ è il polinomio di grado n di minimo scarto da $f(x) =$

x^{n+1} e in questo caso $E_n(x^{n+1}) = \frac{1}{2^n}$. Utilizzando la(6) si vede che in un generico intervallo $[a, b]$ si ha $E_n(x^{n+1}) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{1}{2^n}$.

□

TEOREMA. *Con riferimento ad un generico schema di interpolazione sui nodi $x_0, x_1, ..., x_n$, data un funzione $f \in C^0([a, b])$ consideriamo il polinomio $L_n(f, x)$. Allora, posto*

$$\lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)| , \tag{8}$$

si ha

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq E_n(f)(1 + \lambda_n). \tag{9}$$

Dim. Esprimiamo l' errore nella forma

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(f, x) &= f(x) - p_n^*(x) - (L_n(f, x) - p_n^*(x)) \\ &= f(x) - p_n^*(x) - (L_n(f, x) - L_n(p_n^*, x)) \\ &= f(x) - p_n^*(x) - \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - p_n^*(x_i)) l_i(x). \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq E_n(f) + E_n(f) \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)| .$$

□

I numeri λ_n sono detti i **Numeri di Lebesgue (**associati ai nodi considerati). Ad ogni matrice di nodi resta associata una successione di Numeri di Lebesgue.

OSSEVAZIONE. *Supponiamo di voler interpolare nei punti $x_0, x_1, ..., x_n$, i valori $y_0, y_1, ..., y_n$. Supponiamo inoltre che tali valori siano affetti da errore ossia che si operi su dei dati perturbati $\overline{y}_0, \overline{y}_1, ..., \overline{y}_n$. Quindi anzichè il polinomio $p_n(x)$ tale che, per ogni $i = 0, 1, ..., n.$, $p_n(x_i) = y_i$, si considera il polinomio $\overline{p}_n(x)$, tale che $\overline{p}_n(x_i) = \overline{y}_i$. In tal caso l' errore commesso sarà*

$$p_n(x) - \overline{p}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \overline{y}_i) l_i(x).$$

E pertanto

$$\begin{aligned} \|p_n - \overline{p}_n\|_\infty &\leq \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)| \max_{0 \leq i \leq n} |y_i - \overline{y}_i| \\ &= \lambda_n \max_{0 \leq i \leq n} |y_i - \overline{y}_i| . \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE. Considerato l' operatore L_n su $C^0([a,b])$ si ha

$$\|L_n\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|L_n(f)\|_\infty = \lambda_n.$$

Infatti, per ogni $f \in C^0([a,b])$,

$$\|L_n(f)\|_\infty \leq \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)| \max_{0\leq i\leq n} |f(x_i)|$$

quindi

$$\|L_n\| \leq \lambda_n.$$

Per verificare l' uguaglianza dimostriamo il viceversa. Sia $\overline{x}$ tale che $\lambda_n = \sum_{i=0}^{n} |l_i(\overline{x})| = \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$ e prendiamo f, con $\|f\|_\infty = 1$, tale che $f(x_i) = sign(l_i(\overline{x}))$. Quindi

$$\|L_n\| \geq \|L_n(f)\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} \left| \sum_{i=0}^{n} l_i(x) sign(l_i(\overline{x})) \right| \geq \lambda_n.$$

Si puo vedere che per ogni matrice di nodi

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Vale infatti il seguente risultato:

TERОREMA (**Natanson**). *Per ogni matrice di nodi in* $[a.b]$ *esiste una costante* $C > 0$ *tale che*

$$\frac{\lambda_n}{\log n} > C.$$

Inoltre se, per ogni n, *i punti di interpolazione sono i nodi di Chebyshev (vedi* (7)), *allora esiste una costante* $M > 0$ *tale che, per ogni* n,

$$\frac{\lambda_n}{\log n} \leq M.$$

□

Dunque per i nodi di Chebyshev i numeri di Lebesgue tendono a $+\infty$ come $\log n$.

Nel caso di nodi equidistanti si può provare che $\lambda_n \leq 2^n$.

In base alla (9) se

$$\lambda_n E_n(f) \to 0,$$

si avrà $\|f - L_n(f,x)\|_\infty \to 0$. Dunque, per il teorema di Natanson, nel caso dell' interpolazione sui nodi di Chebyshev basterà che

$$(\log n) E_n(f) \to 0. \tag{10}$$

DEFINIZIONE. *Si definisce* **modulo di continuità** *di una funzione* f *definita in* $[a, b]$ *la funzione* (di δ)

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)|\,, x, y \in [a, b].$$

□

La funzione $\omega(f, \delta)$ è non decrescente rispetto a δ ed inoltre per ogni $f \in C^0([a, b])$ si ha

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f, \delta) = 0.$$

TEOREMA. (**Jackson**) *Per ogni* n, *valgono le seguenti maggiorazioni*:

$$E_n(f) \leq 6\omega(f, \frac{b-a}{2n}),\ \textit{se}\ f \in C^0([a, b]); \tag{11}$$

$$E_n(f) \leq 3\frac{b-a}{n} \|f'\|_\infty\,,\ \textit{se}\ f \in C^1([a, b]); n \geq 1. \tag{12}$$

$$E_n(f) \leq c_k \frac{(b-a)^k}{n^k} \left\| f^{(k)} \right\|_\infty\,,\ \textit{se}\ f \in C^k([a, b]);\ k > 1, n > k-1,$$

dove c_k *è una costante dipendente da* k.

□

Applichiamo ora questi risultati per vedere quando la condizione (10) è verificata.

Si vede subito che se $f \in C^1([a, b])$, la (10) è verificata per la (12).

Osserviamo che la (10) vale anche per funzioni meno regolari, ossia per funzioni **Hölderiane** su $[a, b]$, cioè tali che:

esistono $\gamma > 0$ *e* $0 < \alpha \leq 1$ *per cui*

$$|f(x) - f(y)| \leq \gamma\, |x-y|^\alpha\,,\ \text{per ogni}\ x, y \in [a, b].$$

Infatti se vale questa condizione avremo

$$\omega(f, \frac{b-a}{2n}) = \sup_{|x-y|\leq\frac{b-a}{2n}} |f(x) - f(y)| \leq \gamma(\frac{b-a}{2n})^\alpha.$$

Dunque per la (11) possiamo concludere che

$$(\log n)E_n(f) \leq 6\gamma(\log n)(\frac{b-a}{2n})^\alpha \to 0.$$

1.8 INTERPOLAZIONE A TRATTI

Per ottenere schemi interpolatori che forniscano approssimazioni convergenti per ogni funzione continua in $[a, b]$ si può ricorrere alla **interpolazione a tratti**. L' idea della interpolazione a tratti considte nel ridurre l' ampiezza degli intervalli di interpolazione, anzichè aumentare il grado dei polinomi interpolanti. Ciò viene realizzato suddividendo l' intervallo $[a, b]$ in un certo numero di sottointervalli ed applicando su ciascuno di questi l' interpolazione con polinomi di grado basso. E' evidente che il massimo errore commesso in $[a, b]$ non è altro che il massimo errore su tutti i sottointervalli. La convergenza si otterrà diminuendo la massima ampiezza di quest' ultimi (aumentandone quindi il numero).
ESEMPIO (**Interpolazione lineare a tratti**).

Consideriamo $m + 1$ punti equidistanti

$$x_0(= a) < x_1 < ... < x_m(= b),$$

vale a dire una partizione Δ_m dell' intervallo $[a, b]$, con gli m sottointervalli $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ che, per semplicità, supponiamo tutti di ampiezza

$$h = \frac{b - a}{m}.$$

Fissiamo $n = 1$ e quindi consideriamo, per ogni indice i, su ciascun sottointervallo I_i il polinomio (di grado 1) interpolante f nei due estremi x_{i-1} e x_i. Indichiamolo con $L_{1,i}(f, x)$ cioè

$$L_{1,i}(f, x_{i-1}) = f(x_{i-1}),\ L_{1,i}(f, x_i) = f(x_i).$$

In questo modo si costruisce una particolare funzione polinomiale a tratti (nel nostro caso lineare a tratti) continua in $[a, b]$, vale a dire un elemento dello spazio

$$S^{1,0}_{\Delta_m} := \left\{s : [a, b] \to R : s|_{I_i} \in \Pi_1,\ \text{per ogni } i = 1, ..., m\ ,\ s \in C^0([a, b])\right\},$$

la cui dimensione è $m + 1$. Chiamiamo tale elemento $s_{1,\Delta_m}(f, x)$. Avremo $s_{1,\Delta_m}(f, x)|_{I_i} = L_{1,i}(f, x)$, vale a dire

$$s_{1,\Delta_m}(f, x_i) = f(x_i),\ \text{per } i = 0, 1, ..., m.$$

TEOREMA. *Per ogni* $f \in C^0([a, b])$ *si ha*

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - s_{1,\Delta_m}(f, x)| = 0.$$

Dim. Sarà

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - s_{1,\Delta_m}(f, x)| = \max_{1\le i\le m} \max_{x\in I_i} |f(x) - L_{1,i}(f, x)|\,. \tag{13}$$

Dalla formula (9), dal Teorema di Jackson (per $n = 1$) e dalla (8) si ottiene

$$\max_{x \in I_i} |f(x) - L_{1,i}(f,x)| \le (1 + \lambda_1) 6\omega(f, \frac{h}{2})$$

con $\lambda_1 = 1$. *Poichè* $f \in C^0([a,b])$ *avremo* $\omega(f, \frac{h}{2}) \to 0$ quando $h \to 0$.

□

OSSSERVAZIONE. In particolare, se $f \in C^2([a,b])$, dalla (13) e dalla (3) si ottiene

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - s_{1,\Delta_m}(f,x)| \le h^2 \frac{\max_{x \in [a,b]} |f"(x)|}{8}.$$

□