1 ZERI DI FUNZIONE

PROBLEMA *Sia f una funzione non lineare scalare. Determinare una soluzione (se esiste) dell' equazione*

$$f(x) = 0.$$

□

OSSERVAZIONE. Supponiamo che la funzione f sia derivabile con continuità in $[a, b]$ e che $\alpha \in [a, b]$ sia tale che

$$f(\alpha) = 0.$$

Se $\bar{\alpha} \in [a, b]$ è una approssimazione di α avremo

$$f(\bar{\alpha}) - f(\alpha) = f'(\xi)(\bar{\alpha} - \alpha),$$

con ξ appartenente all' intervallo di estremi α e $\bar{\alpha}$. Ossia

$$f(\bar{\alpha}) = f'(\xi)(\bar{\alpha} - \alpha).$$

Abbiamo così una relazione tra l' errore $\bar{\alpha} - \alpha$ e il *residuo* (calcolato in $\bar{\alpha}$) dell' equazione, cioè $f(\bar{\alpha})$.

Notiamo che potrebbe accadere che, pur essendo $|f(\bar{\alpha})|$ "piccolo", $|\bar{\alpha} - \alpha|$ sia "grande" (se $|f'(\xi)|$ è "molto piccolo"). Il fatto che la funzione f abbia derivata "piccola" in valore assoluto, in un intorno di α, è un sintomo di **mal condizionamento** del problema.

□

In generale, per ottenere una soluzione del problema, viene costruita una successione di punti $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ convergente ad α tale che $f(\alpha)$= 0.

1.1 METODO DI BISEZIONE

TEOREMA. *Sia $f \in C^0([a, b])$ e sia*

$$f(a)f(b) < 0.$$

Allora esiste in (a, b) almeno uno zero di f (ossia una soluzione di $f(x) = 0$).

Il metodo di **bisezione** consiste nel dimezzare di volta in volta l'intervallo, scegliendo come intervallo successivo quello dove la funzione è di segno opposto agli estremi. Si costruirà così una successione di intervalli, uno contenuto nell' altro, che contengono almeno uno zero.

Schema (bisezione)

Dato $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$,

1) Calcola $c = a + (b - a)/2$.

2) Se $f(c) = 0$, stop.

3) Se $f(c)f(a) < 0$, allora poni $b := c$ e ritorna al punto 1,

altrimenti poni $a := c$ *e ritorna al punto* 1.
□

Dopo n passaggi si ottiene un intervallo di ampiezza $(b-a)/2^n$ che contiene almeno uno zero.

I vantaggi del metodo sono: non richiede altre ipotesi se non quelle del Teorema, converge ad una soluzione anche in presenza di più soluzioni in $[a.b]$, dispone di una stima a priori dell' errore. Lo svantaggio consiste nel fatto che può essere molto lento rispetto ad altri metodi che considereremo in seguito.

Tali metodi come vedremo, in generale assicurano la convergenza solo se si opera in un opportuno intorno della soluzione cercata, dunque il metodo di bisezione può essere inizialmente utilizzato per individuare un tale intorno.

1.2 METODI DI ITERAZIONE FUNZIONALE

I metodi di iterazione funzionale (ad un punto) sono basati su formule iterative del tipo

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \text{per } n = 0, 1, 2, ..., \text{ con } x_0 \text{ (punto di innesco) } \textit{dato},$$

dove φ rappresenta una opportuna **funzione di iterazione**. L' approssimazione successiva è ottenuta da quella immediatamente precedente, tramite la φ. Possiamo anche avere formule a due punti (o anche a più punti) del tipo

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, x_{n-1}), \textit{per } n = 1, 2, ..., \text{ con } x_0, x_1 \text{(punti di innesco) } \textit{dati}.$$

Diremo che tali metodi sono **localmente convergenti** ad α se esiste un intorno di α tale che quando il metodo viene innescato in tale intorno, la successione generata converge ad α .

1.3 CONVERGENZA DEI METODI AD UN PUNTO

Per costruire metodi ad un punto per approssimare α tale che $f(\alpha) = 0$, consideriamo in luogo di $f(x) = 0$, un' equazione, detta di punto fisso, del tipo

$$x = \varphi(x),$$

dove φ è una funzione scelta in modo che

$$\alpha = \varphi(\alpha).$$

Vale a dire che α è un **punto fisso** di φ. Una scelta possibile è ad esempio $\varphi(x) = x - \lambda(x)f(x)$, con $\lambda(x)$ opportuna.

Se la successione

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \; n = 0, 1, 2, ...$$

converge localmente ad α, si dice che il punto fisso α è **attrattivo** per la φ, in caso contrario diremo che α è un punto fisso **repulsivo** per la φ.
TEOREMA. *Supponiamo che $\varphi(x)$ sia continua in $[a,b]$ e che la successione definita dal metodo ad un punto*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),$$

sia tale che $x_n \in [a,b]$ per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Allora se la successione converge, il suo limite è un punto fisso di φ.
Dim. Supponiamo che

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Allora

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_n) = \varphi(\alpha).$$

□
TEOREMA (di convergenza locale) *Sia $\alpha \in (a,b)$. Sia $\delta > 0$ tale che $I_\delta :=$ $[\alpha-\delta, \alpha+\delta] \subseteq [a,b]$ e supponiamo esista un numero positivo $c < 1$ tale che*

$$|\varphi(x) - \alpha| \le c\,|x-\alpha|\,,$$

per ogni $x \in I_\delta$. Allora, per ogni $x_0 \in I_\delta$, la successione definita da

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),$$

rimane in I_δ e converge ad α (dunque converge localmente ad α).

Dim. Per ogni $x_0 \in I_\delta$ avremo

$$|x_1 - \alpha| = |\varphi(x_0) - \alpha| \le c\,|x_0 - \alpha| \le c\delta,$$

dunque $x_1 \in I_\delta$. Così procedendo per $n \ge 1$ sarà

$$|x_n - \alpha| = |\varphi(x_{n-1}) - \alpha| \le c\,|x_{n-1} - \alpha| \le \ldots\ldots \le c^n\,|x_0 - \alpha| \le c^n\delta.$$

Poichè $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$, avremo $\lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0$.
□
OSSERVAZIONE. Sotto le ipotesi del teorema precedente, α è l'unico punto fisso di φ in I_δ. Infatti se $\beta \in I_\delta$ è tale che $\beta = \varphi(\beta)$, allora

$$|\varphi(\beta) - \alpha| = |\beta - \alpha| \le c\,|\beta - \alpha|\,,$$

che implica $\beta = \alpha$.
□

Si osservi che le ipotesi del teorema sono verificate se esiste un intorno I_δ dove la funzione φ è derivabile con derivata continua tale che

$$|\varphi'(x)| \le c < 1.$$

Infatti, per ogni $x \in I_\delta$, per il teorema di Lagrange avremo

$$\varphi(x) - \alpha = \varphi(x) - \varphi(\alpha) = \varphi'(\xi)(x-\alpha),\ con\ \xi \in I_\delta,$$

il che implica

$$|\varphi(x) - \alpha| \le c\,|x-\alpha|\,.$$

Possiamo dunque concludere (per la permanenza del segno) che se $\varphi \in C^0(I_\delta)$ *e se*

$$|\varphi'(\alpha)| < 1,$$

allora le ipotesi del teorema di convergenza locale restano verificate, ossia

se $|\varphi'(\alpha)| < 1$ **il metodo converge localmente** *ad* α(*α è punto fisso* **attrattivo** *per la* φ).

Se invece $|\varphi'(\alpha)| > 1$, **il metodo non converge localmente** ad α (α è **repulsivo** per la φ).

In taluni casi si può avere convergenza locale anche se $|\varphi'(\alpha)| = 1$ (vedi ad es. $\varphi(x) = \sin x$).

□

1.4 ORDINE DI CONVERGENZA

DEFINIZIONE. *Sia* $\{x_n\}$, *per* $n = 0, 1, 2...$, *una successione convergente ad* α *con* $x_n \neq \alpha$ *per ogni* n. *Se per* $p \ge 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha\,|}{|x_n - \alpha\,|^p} = K > 0,$$

si dirà che la successione ha ***ordine di convergenza*** p.

Il valore K viene detto "costante asintotica".

E' facile verificare che la proprietà può valere per un unico p (si considerino i casi $p - \varepsilon$ e $p + \varepsilon$, per $\varepsilon > 0$).

Consideriamo in particolare

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha\,|}{|x_n - \alpha\,|}.$$

Si possono verificare i seguenti casi:

1) $0 < C < 1$ *allora* $p = 1$ *e la convergenza si dirà* **lineare;**

2) $C = 0$ *e la convergenza si dirà* **superlineare.**

Vi possono essere casi di successioni convergenti per le quali $C = 1$, *in tali casi la convergenza si dirà* **sublineare;**

□

NOTA. Talora è possibile provare che, per un certo $p \ge 1$ esiste una costante $c_p \ge 0$ tale che, per tutti gli n sufficientemente grandi, si ha

$$\frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} \le c_p..$$

In tal caso si dirà che la successione converge con ordine almeno p.

APPLICAZIONE AI METODI AD UN PUNTO.

Consideriamo un metodo ad un punto

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), x_0 \text{ dato.}$$

Supponiamo che$\{x_n\}$ converga ad α e che φ sia derivabile con derivata continua in un intorno I_δ di α. Quindi, quando $x_n \in I_\delta$, avremo che

$$\varphi(x_n) - \alpha = \varphi'(\xi_n)(x_n - \alpha),$$

con ξ_n opportuno punto compreso tra x_n ed α. Poichè

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \alpha,$$

ne consegue che

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\varphi(x_n) - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = \lim_{n\to\infty} |\varphi'(\xi_n)| = |\varphi'(\alpha)|. \quad (1)$$

Dunque se $\varphi'(\alpha) = 0$ la convergenza è superlineare.

Il seguente criterio permette di individuare l' ordine di convergenza di un metodo ad un punto, sotto opportune ipotesi.

CRITERIO. *Supponiamo che* $\varphi \in C^p(I_\delta)$ *e che*

$$\varphi'(\alpha) = ... = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0,$$

$$\varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Supponiamo che la successione $\{x_n\}\,(x_n \neq \alpha)$, *generata dal metodo* $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, *converga ad* α. *Allora* **l' ordine di convergenza del metodo è** p.

Dim. Per la convergenza, avremo che $x_n \in I_\delta$, per tutti gli n sufficientemente grandi. Per tali n, utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor (con il resto di Lagrange) della funzione φ in un intorno di α otteniamo

$$x_{n+1}-\alpha = \varphi(x_n)-\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha)(x_n-\alpha)+.....+\varphi^{(p-1)}(\alpha)\frac{(x_n-\alpha)^{p-1}}{(p-1)!}+\varphi^{(p)}(\xi_n)\frac{(x_n-\alpha)^p}{p!},$$

con ξ_n tra x_n ed α. Quindi poichè $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \alpha$, per le nostre ipotesi si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!}\right| = \left|\frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}\right| > 0.$$

□

N.B. Non sempre i metodi ad un punto hanno ordine intero, si veda ad esempio $x_{n+1} = x_n^{\frac{3}{2}}$.

1.5 METODO DI NEWTON (delle tangenti)

Supponiamo che $f \in C^1([a,b])$ e che $\alpha \in (a,b)$ sia tale che $f(\alpha) = 0$. Sia quindi $x_n \in [a,b]$ una approssimazione di α tale che $f'(x_n) \neq 0$. Per ogni $x \in [a,b]$ avremo

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + R_n(x).$$

Scegliamo allora x_{n+1} in modo che

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

cioè

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ .$$

Questo è il **metodo di Newton** o delle tangenti, detto anche metodo di **Newton-Raphson** (Joseph, 1648-1715).

Dunque, geometricamente x_{n+1} è l'ascissa dove la tangente alla curva $f(x)$ nel punto $(x_n, f(x_n))$ interseca l' asse x. Il costo computazionale del metodo è essenzialmente di due valutazioni di funzione (f ed f') ad ogni passo.

Questo procedimento definisce, per $n = 0, 1, ...$, un metodo ad un punto con funzione di iterazione definita da

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Ipotesi:

Sia $\alpha \in (a,b)$ tale che $f(\alpha) = 0, \ f'(\alpha) \neq 0$ (cioè α è una radice semplice).

Per tale ipotesi $f'(x) \neq 0$ in un opportuno intorno di α e pertanto il metodo è ivi ben definito.

Se $f \in C^2([a,b])$ avremo

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f"(x)}{(f'(x))^2}$$

e dunque

$$\varphi'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f"(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0.$$

Pertanto, sotto le nostre ipotesi, il metodo di Newton ha **convergenza locale superlineare**. Più precisamente vale il seguente risultato.

TEOREMA. *Se α è radice semplice e $f \in C^2([a,b])$ allora il metodo è di ordine $p = 2$ (almeno)*

Dim: Sia dunque $\{x_n\}$, per $n = 0, 1, ...$, una successione in $[a,b]$, generata dal metodo di Newton e convergente ad α. Poiché

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

e
$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + f''(\xi_n)(\alpha - x_n)^2/2,$$
con ξ_n opportuno punto compreso tra x_n ed α, avremo che
$$f'(x_n)(\alpha - x_{n+1}) = -f''(\xi_n)(\alpha - x_n)^2/2.$$
Dunque
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right|.$$
□

NOTA. Si dice che la radice α ha molteplicità r se $f(x) = g(x)(x - \alpha)^r$ per $x \neq \alpha$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) \neq 0$.

Se la f è sufficientemente regolare ma α non è radice semplice ($r > 1$), si può dimostrare che il metodo di Newton converge ancora localmente ma con ordine $p = 1$ (convergenza lineare). Se $f(\alpha)= f'(\alpha)= ..., f^{r-1}(\alpha) = 0$ e $f^{(r)}(\alpha)\neq 0$, allora α ha molteplicità r e si può verificare che il metodo
$$x_{n+1} = x_n - r\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
converge localmente con ordine $p = 2$.

Se non si conosce r, si può utilizzare il metodo di Newton applicato alla funzione $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, per la quale α è radice semplice, infatti risulta $u^{'}(x) = (x-\alpha)\frac{g(x)}{(rg(x)+(x-\alpha)g^{'}(x))}$. Si ottiene così il metodo di Halley:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}.$$

Se f è sufficientemente regolare questo metodo converge ancora con ordine $p = 2$.

Nelle applicazioni di questi metodi, si presti attenzione alla possibile instabilità numerica derivante dal fatto che per x_n vicino ad α , $f(x_n)$ e $f'(x_n)$ sono entrambi piccoli.

TEOREMA (di convergenza nell' intervallo) *Siano verificate le seguenti ipotesi:*
1. $f \in C^2([a, b])$;
2. $f'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in [a, b]$;
3. $f(a)f(b) < 0$,

allora scegliendo $x_0 = a$ *oppure* $x_0 = b$ *in modo che* $f(x_0)f^{"}(x_0) > 0$ (tale x_0 è detto l' estremo di Fourier), *la successione del metodo di Newton è monotona e converge all' unica radice* $\alpha \in (a, b)$, *con ordine di convergenza* 2.

1.6 METODO DELLE SECANTI

IL **metodo delle secanti** è definito dalla formula iterativa a due punti:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \ , \ x_0, x_1 \text{ dati.}$$

Se α è radice semplice, si può dimostrare che il metodo possiede convergenza locale (ossia converge se x_0, x_1 sono scelti in un opportuno intorno di α) e che il suo **ordine di convergenza** è

$$p = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618......$$

La "costante asintotica" è $K = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \left|\frac{f"(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|^{\frac{1}{p}}$. Il costo computazionale è, escludendo il primo passo, essenzialmente dovuto al calcolo di $f(x_n)$ cioè una valutazione di funzione. Dunque due passi del metodo delle secanti hanno la stessa complessità computazionale di un passo del metodo di Newton. Ma facendo due passi del metodo delle secanti asintoticamente otteniamo

$$|x_{n+2} - \alpha| \simeq K\,|x_{n+1} - \alpha|^p \simeq K^{1+p}\,|x_n - \alpha|^{p^2}$$

Cioè un metodo di ordine $p^2 = 1 + p = 2.618$. Dunque possiamo dire che in generale il metodo delle secanti risulta più conveniente di quello di Newton.

Il metodo delle secanti converge sotto le condizioni del teorema di convergenza nell' intervallo per il metodo di Newton se si sceglie il punto x_1 dalla stessa parte di x_0 rispetto ad α.

1.7 CENNI AD ALTRI METODI

1. Metodo (a volte detto anche metodo delle corde)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m} \ , \ x_0 \text{ dato,}$$

dove m è una opportuna costante. Ad esempio $m = f^{'}(x_0)$ (metodo di Newton modificato o della tangente fissa), oppure $m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ (secante fissa). La convergenza locale ad una radice α è garantita se

$$\left|1 - \frac{f^{'}(\alpha)}{m}\right| < 1.$$

2. Metodo delle corde (o metodo delle secanti con estremo fisso). Il metodo, per ogni n, ha la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - c)}{f(x_n) - f(c)} \ , x_0 \text{ dato, } c \text{ punto fissato.}$$

Se $\alpha \in [a,b]$ è radice semplice, scegliendo il punto c in modo opportuno il metodo converge localmente con ordine 1.

3. Accelerazione di Aitken e metodo di Steffensen.

Supponiamo che la successione $\{x_n\}$ converga ad α e sia tale che, per $0 < K < 1$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \alpha &\simeq K(x_n - \alpha), \\ x_{n+2} - \alpha &\simeq K(x_{n+1} - \alpha). \end{aligned}$$

Allora, assumendo l' uguaglianza, otteniamo

$$K = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}$$

e quindi

$$\alpha \simeq x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \ (\textit{formula di Aitken}).$$

In base a ciò consideriamo la nuova approssimazione di α data da

$$\overline{x_n} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \ .$$

Si vede che la successione$\{\overline{x_n}\}$ così costruita converge più velocemente della successione $\{x_n\}$ di partenza.

Utilizzando la formula di Aitken si ottiene il seguente metodo di Steffensen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} \ , x_0 \text{ dato.}$$

Questo metodo, per radici semplici, ha ordine di convergenza 2.

1.8 CRITERI DI ARRESTO

Nei metodi devono essere introdotti dei criteri di arresto. Per prima cosa il prodedimento verrà arrestato se viene superato un numero massimo (ragionevole) di iterazioni, quindi l' arresto avverrà se si verificano condizioni che ci possano garantire che l' approssimazione x_n è accettabile. Ad esempio condizioni come $|f(x_n)| \leq \varepsilon_1$ e $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon_2$, oppure $\frac{|f(x_n)|}{f_{\max}} \leq \sigma_1$ e $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{\min[|x_n|, |x_{n+1}|]} \leq \sigma_2$ (se $x_n x_{n+1} \neq 0$), dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sigma_1, \sigma_2$, sono delle tolleranze assegnate e $f_{\max} = \max_{x \in I} |f(x)|$, con I un opportuno intorno di α. Si ricordi che $|f(x_n)|$ potrebbe essere piccolo ma x_n non accettabile. Inoltre le tolleranze dovranno essere scelte in modo da assicurare che le condizioni siano in pratica verificabili.

1.9 SISTEMI NON LINEARI (cenni)

Consideriamo ora più in generale funzioni vettoriali di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$, ossia del tipo

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))^T, \qquad x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

dove, per $i = 1, 2, ..., n$, ciascuna $f_i(x)$ è una funzione scalare del vettore x. Dunque, in generale avremo $F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dove D_F indica il dominio di definizione di F.

Il problema è ora quello di cercare un vettore soluzione dell' equazione (sistema)

$$F(x) = 0.$$

Anche in questo caso si costruiscono successioni di vettori $\{x^{(k)}\}$, $k = 0, 1, ..$, convergenti ad una soluzione (se esiste), che indichiamo ora con $x^* \in \mathbb{R}^n$.

Per far ciò cercheremo di estendere alcune idee considerate nel caso scalare ($n = 1$). Introduciamo in $\mathbb{R}^n$ una norma vettoriale $\|.\|$. Vale la definizione di ordine di convergenza, considerando ora la norma anzichè il valore assoluto.

Dato un vettore $x \in D_F$, la matrice Jacobiana $J_F(x)$ di F in x è definita come la matrice le cui componenti sono le derivate parziali $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_{j,}}$ calcolate in x.

E' noto che, se F è differenziabile (secondo Fréchet) in x, si ha

$$F'(x) = J_F(x).$$

METODO DI NEWTON in $\mathbb{R}^n$.

Il metodo di Newton in $\mathbb{R}^n$ è definito dalla formula iterativa

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \text{ per } k = 0, 1, ..., \textit{con } x^{(0)} \text{ vettore dato,}$$

dove $F'(x^{(k)})$ è la matrice Jacobiana di F calcolata nel vettore $x^{(k)}$. In pratica si risolve il sistema lineare

$$F'(x^{(k)}) s^{(k)} = -F(x^{(k)}),$$

e quindi si ottiene

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Si prova che se F è sufficienemente regolare, $F(x^*) = 0$ e $det(F'(x^*)) \neq 0$, allora il metodo di Newton converge localmente ad x^* e la convergenza è quadratica (ordine di convergenza almeno 2).